Chapitre 7 : Ensembles et applications

Table des matières

I Ensembles

I.1 Premières définitions

Définition 1 (Ensemble)**.**

Un **ensemble** E est un groupement d'objets distincts, appelées **éléments** de l'ensemble E.

Remarque :
On peut définir un ensemble en décrivant tous ses éléments

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

ou bien comme le sous-ensemble d'un ensemble plus grand constitué des éléments vérifiant une certaine propriété.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 3\}$$

$$\Omega = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ continue }, f(0) = 0\}$$

Définition 2 (Ensemble vide)**.**

Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément. Il est appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Définition 3 (Appartenance)**.**

Si x est un élement de l'ensemble E, on dit que x **appartient à** E et on note $x \in E$.

✍ **Exemple 1**
$\frac{1}{2} \in [0; 1]$, $\frac{3}{2} \notin [0; 1]$

✍ **Exemple 2**
$i \in \mathbb{C}$, $i \notin \mathbb{R}$

Définition 4 (Inclusion).

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A est **inclus dans** B (et on note $A \subset B$) lorsque tout élément de A est aussi un élément de B.
On dit aussi que A est une **partie** de B ou que A est un **sous-ensemble** de B

Remarque :
L'inclusion $A \subset B$ se traduit avec des quantificateurs de la manière suivante :

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ou encore

$$\forall x \in A, x \in B$$

Attention : Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.

✍ **Exemple 3**
$1 \in \{1;2;3;4;5;6\}$ et $\{1\} \subset \{1;2;3;4;5;6\}$

✍ **Exemple 4**
$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Méthode 1 (Montrer que $A \subset B$).

On prend un élément générique de A et on montre qu'il appartient à B.

Méthode 2 (Montrer que $A \not\subset B$).

On trouve un élément de A qui n'appartient pas à B.

✍ **Exemple 5**
$A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 4\}$. Montrer que $A \subset B$ mais $B \not\subset A$.

✎ **Exercice 1**
Soit $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}; (x-1)(x-3) \geq 0\}$. Montrer que $A \subset B$. A-t-on $B \subset A$?

Méthode 3 (Montrer que $A = B$).

On montre que $A \subset B$ et $B \subset A$.

✍ **Exemple 6**
Montrer que $\mathbb{R}- = \{x \in \mathbb{R}; \forall y > 0, x \leq y\}$

Méthode 4 (Montrer que $A = B$ lorsque A et B sont finis).

On montre que $A \subset B$ et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

✍ **Exemple 7**
$A = \{-1;1;-i;i\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}; z^4 = 1\}$

Méthode 5 (Montrer que $A = B$ lorsque A et B sont des espaces vectoriels de dimension finie)**.**

On montre que $A \subset B$ et $\dim(A) = \dim(B)$

✍ **Exemple 8**
Plus tard !

Définition 5 (Réunion de deux ensembles)**.**

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B :

$$A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

✍ **Exemple 9**
$[0; 2] \cup [1; 3] = \dots\dots\dots\dots$

Définition 6 (Réunion d'un nombre fini d'ensembles)**.**

Soit E un ensemble, I un ensemble (d'indices) et, pour tout $i \in I$, A_i une partie de E. On appelle **réunion** des A_i, notée $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à **au moins un** des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E; \exists i \in I; x \in A_i\}$$

✍ **Exemple 10**
$[1, 2] \cup [0; \frac{1}{2}[\cup] - 1; 1] = \dots$

✍ **Exemple 11**
Déterminer $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$

✎ **Exercice 2**
Déterminer $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}} [x; x + 1[$

Définition 7 (Intersection de deux ensembles)**.**

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **intersection** de A et B, notée $A \cap B$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B :

$$A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Définition 8 (Intersection d'un nombre fini d'ensembles)**.**

Soit E un ensemble et $A_1, \dots A_n$ des parties de E. On appelle **intersection** des A_i, notée $\cap_{i=1}^n A_i$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à **tous** les A_i :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E; \forall i \in \{1; \dots n\}; x \in A_i\}$$

✍ **Exemple 12**
$[1,3[\cap]2,4[\cap]1,7] = \dots$

✍ **Exemple 13**
$[0;2] \cap [1;3] = \dots\dots\dots$

✍ **Exemple 14**
Calculer $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[$

✎ **Exercice 3**
Calculer $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \left[1-\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right]$

I.2 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 9 (Ensemble des parties d'un ensemble)**.**

Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Remarque :
Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$

✍ **Exemple 15**
$\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{3\})$, $\mathcal{P}(\{3;5\})$

✎ **Exercice 4**
$E = \{1;2;3\}$ Déterminer $\mathcal{P}(E)$

Proposition 1 (Lois sur $\mathcal{P}(E)$)**.**

Si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est muni de deux lois de composition interne $\cup$ et $\cap$ commutatives et associatives et vérifiant : $\forall A,B,C \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition 10 (Complémentaire d'une partie)**.**

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A dans E, noté $E \setminus A$ (noté aussi $\bar{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$E \setminus A = \{x \in E; x \notin A\}$$

Proposition 2 (Propriétés du complémentaires)**.**

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

Proposition 3 (Lois de De Morgan).

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E

1. $\overline{A \cup B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\overline{A \cap B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✎ **Exercice 5**
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer :

1. $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)$
2. $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

Définition 11 (Différence de deux ensemble).

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.
On appelle différence de B par A, noté $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à B mais pas à A :

$$B \setminus A = \{x \in E; x \in B \text{ et } x \notin A\}$$

Remarque :
$B \setminus A = B \cap \overline{A}$

✎ **Exercice 6**
Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

✎ **Exercice 7**
Compléter par l'un des symboles suivants : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$
Soient A et B deux ensembles quelconques.

1. $A \cap B \ldots A$
2. Si $A \subset B$ alors : $\forall x, x \ldots A \Rightarrow x \ldots B$
3. Si $A \cap B = A$ alors $A \ldots B$
4. $B \subset A \ldots B$

I.3 Produit cartésien d'ensembles

Définition 12 (Produit cartésien de deux d'ensembles).

Soient E et F deux ensembles quelconques. On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$

$$E \times F = \{(x; y); x \in E, y \in F\}$$

✍ **Exemple 16**

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}+ = \{(x; y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}+\}$$

✍ **Exemple 17**
Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ a pour solution le couple $(x; y) = (2; 3)$. L'ensemble des solution de ce système est donc $\mathcal{S} = \{(2; 3)\}$

✎ **Exercice 8**
Résoudre le système (constitué d'une seule équation) $\left\{ x+y=1 \right.$

Définition 13 (Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles)**.**

Plus généralement, si $E_1, E_2 \dots E_p$ sont des ensembles on appelle **produit cartésien** de $E_1, \dots E_p$ l'ensemble des p-uplets $(x_1; \dots; x_p)$ où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots x_p \in E_p$

$$E_1 \times \dots\dots E_p = \{(x_1; \dots; x_p); x_1 \in E_1, \dots x_p \in E_p\}$$

Définition 14.

On note E^P le **produit cartésien** $\underbrace{E \times E \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$

✍ **Exemple 18**

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4$$

✎ **Exercice 9**
Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante.
2. Tout entier naturel n peut s'écrire comme la somme de carrés de quatre entiers (théorème des quatre carrés, Lagrange 1770)

I.4 Partition d'un ensemble

Définition 15 (Ensembles disjoints)**.**

Soit A et B deux ensembles. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

✍ **Exemple 19**
$\mathbb{R}-$ et $[2, 3]$ sont disjoints.

Définition 16 (Ensembles deux à deux disjoints)**.**

Soit $A_1, \dots A_n$ des ensembles. On dit qu'ils sont **deux à deux disjoints** si : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j \neq 0$

✍ **Exemple 20**
$\mathbb{R}-$, $[4; 6]$ et $[2, 3]$ sont deux à deux disjoints.
$\mathbb{R}-$, $[2, 3]$ et $[1, 6]$ ne sont pas deux à deux disjoints.

Définition 17 (Partition)**.**

Soit E un ensemble et $A_1, \dots A_n$ des sous-ensembles de E. On dit que les A_i forment une **partition** de E (ou un recouvrement disjoint de E) si

1. $\cup_{i=1}^{n} A_i = E$
2. Les A_i sont deux à deux disjoints.

✍ **Exemple 21**
$E = [0;1]$.
$[0, \frac{1}{3}[$, $[\frac{1}{3}; 1[$, $\{1\}$ forment une partition de E

✍ **Exemple 22**
$E = \mathbb{N}$ A_1 l'ensemble des entiers naturels pairs, A_2 l'ensemble des entiers naturels impairs. A_1 et A_2 forment une partition de E.

✍ **Exemple 23**
Si A est un sous-ensemble de E alors $(A, \overline{A})$ est une partition de E

✎ **Exercice 10**
Soient a, b et c des réels, avec $a > 0$. A quelle condition les sous-ensembles $]0, a[$, $]-\infty, b]$ et $[c, +\infty[$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?

✎ **Exercice 11**
1. Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.
2. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2; i < j\}$, $B = \{(i, j)\ E^2; i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2; i > j\}$. Les représenter par un dessin, et montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

✎ **Exercice 12**
Laquelle de ces trois familles forme une partition de $\mathbb{R}$?

1. $\{[k; k+1]\}_{k \in \mathbb{Z}}$
2. $\{[k; k+1[\}_{k \in \mathbb{Z}}$
3. $\{]k; k+1[\}_{k \in \mathbb{Z}}$

II Applications

II.1 Définition

Définition 18 (Application)**.**

Une **application** f est définie par :

- Un ensemble de départ E
- Un ensemble d'arrivée F
- La donnée pour tout $x \in E$ d'un **unique** élément de F noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.

On dit que f est une application de E dans F et on note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

✍ **Exemple 24**

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

✍ **Exemple 25**
Soit f une fonction de la variable réelle.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est une application.

✍ **Exemple 26**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases}$$

✍ **Exemple 27**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{cases}$$

✍ **Exemple 28**

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{iz+1} \end{cases}$$

✍ **Exemple 29**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y; x-y) \end{cases}$$

Notation.

On note F^E ou encore $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F

Définition 19.

Si $y \in F$ et $x \in E$ sont tels que $y = f(x)$ on dit que y est l'image de x par f et que x est **un** antécédent de y par f.

✎ **Exercice 13**
Compléter le tableau suivant :

Application	$f(1)$	Antécédent(s) de 1 (?)	$f(-2)$	Antécédent(s) de -2 (?)	Graphe
$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{cases}$					
$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{cases}$					
$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases}$					
$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R}- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f_7 : \begin{cases} [\![-3;3]\!] & \to & [\![-6;6]\!] \\ x & \mapsto & x \end{cases}$					
$f_8 : \begin{cases} [\![-3;3]\!] & \to & [\![-6;6]\!] \\ x & \mapsto & 2x \end{cases}$					

Notation.

On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E l'**ensemble des applications de** E **dans** F.

Définition 20.

Le **graphe** d'une application $f : E \to F$ est le sous-ensemble de $E \times F$

$$\{(x; f(x)); x \in E\}$$

II.2 Exemples importants

Définition 21 (Application identité).

Soit E est un ensemble. On appelle **application identité de** E et on note Id_E l'application :

$$Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

✍ **Exemple 30**
Dessiner le graphe de l'application identité de $[0, 1]$.

Définition 22 (Fonction indicatrice).

Soit E est un ensemble et A une partie de E. On définit une application de E dans l'ensemble $\{0; 1\}$, appelée **fonction indicatrice de** A et notée $1\!\!1_A$ par :

$$1\!\!1_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

✍ **Exemple 31**
Dessiner le graphe de l'application $1\!\!1_A$ où $A = [0, 1]$ en tant qu'application de $\mathbb{R}$ dans $\{0; 1\}$.

✍ **Exemple 32**
Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$
On a $f = 1\!\!1_{\mathbb{R}^+} \cos$

Définition 23 (Restriction).

Soient E et F sont deux ensembles et f une application de E dans F. Si $A \subset E$, on appelle **restriction de** f **à** A, notée $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

✍ **Exemple 33**
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Dessiner le graphe de la restriction de $f_{|[0,1]}$.

Définition 24 (Prolongement)**.**

Soit A et E deux ensembles tels que $A \subset E$, F un ensemble et f une application de A dans F.
On qu'une application g de E dans F est **un prolongement** de f à E si $g_{|A} = f$

✍ **Exemple 34**

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est un prolongement (par continuité) de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$
car on a $g_{|\mathbb{R}^*} = f$.

✍ **Exemple 35**

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est un prolongement de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$
car on a $h_{|\mathbb{R}^*} = f$.
Ce n'est pas un prolongement par continuité car la fonction h ainsi obtenue n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Définition 25 (Famille d'éléments d'un ensemble)**.**

Soit E un ensemnle et I un sous-ensemble fini ou dénombrable. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.

Notation.

On note E^I l'ensemble de toutes les familles d'éléments de E indexées par I.

✍ **Exemple 36**
Une suite u à valeur réelle est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites réelles.

✍ **Exemple 37**
Une famille $(u_1, u_2, \dots u_n)$ de vecteurs du plan indexée par $\{1; 2 \dots n\}$ est un élément de $(\mathbb{R}^2)^{\{1,2,\dots n\}}$

II.3 Image directe, image réciproque

Définition 26.

Soit $f : E \to F$ une application. On note $f(E)$ l'ensemble des image par f des éléménets de E :

$$f(E) = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}$$

$$f(E) = \{f(x); x \in E\}$$

On dit que $f(E)$ est l'image de f. Si $A \subset E$, on note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$$

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

On dit que $f(A)$ est l'**image directe** de l'ensemble A par l'application f.

✍ **Exemple 38**

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ .On a $f([-2;2]) = [0;4]$ et et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}+$.

✎ **Exercice 14**

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$. Déterminer $g([2;5])$.

Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$. Déterminer $h(\mathbb{R})$.

Remarque :

L'ensemble $f(E)$ est un sous ensemble de F mais en général $\boxed{f(E) \neq F}$.

✎ **Exercice 15**

Soit f une application de E dans F.
Montrer que pour tous A, $A' \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Définition 27 (Image réciproque d'un ensemble)**.**

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et G un sous ensemble de F.
L'**image réciproque** de G par f est l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à G. On la note $f^{-1}(G)$.

$$f^{-1}(G) = \{x \in E / f(x) \in G\}$$

Remarque :

Attention à la notation ! f^{-1} n'est pas une application !

✍ **Exemple 39**

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, on a $f^{-1}([0;2]) = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Déterminer $f^{-1}([-2;3])$ et $f^{-1}([-2;-1]$.

✎ **Exercice 16**

Si $h : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $h^{-1}([0;2])$, $h^{-1}([-2;3])$ et $h^{-1}([-2;-1]$.

✎ **Exercice 17**

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$. Déterminer $g^{-1}([-8;27])$ et $g^{-1}([0;8])$.

✎ **Exercice 18**
Soit f une application de E dans F.
Montrer que pour tous B, $B' \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Définition 28 (Composée de deux applications)**.**

Soit $f : E_f \to F_f$ et $g : E_g \to F_g$ deux applications. Si $F_g \subset E_f$, on peut définir la composée de g par f, notée $f \circ g$ par

$$f \circ g : \begin{cases} E_g \to F_f \\ x \mapsto f(g(x)) \end{cases}$$

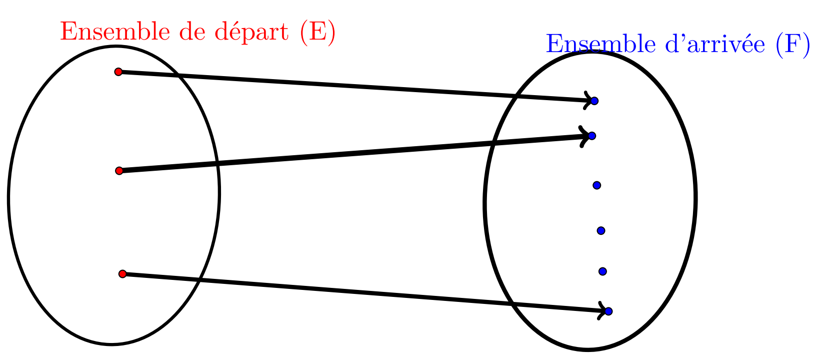
✍ **Exemple 40**
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ et $g : \begin{cases}]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
Déterminer si $g \circ f$ et $f \circ g$ existent puis trouver leur expression algébrique.

II.4 Injection, surjection, bijection

Définition 29 (Injection)**.**

Soit f une application de E dans F. On dit que f est **injective** (ou que f est une injection de E dans F) si tout élément de F admet **au plus un** antécédent dans E.

Remarque :
Cela revient à dire que tout élément de F admet 0 ou 1 antécédent.



✍ **Exemple 41**

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

n'est pas injective : le réel 1 possède deux antécédents par f.

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est injective.
Tout élément de $\mathbb{R}$ possède au plus un antécédent dans $\mathbb{R}^-$: Un réel y possède 0 antécédent si $y < 0$ et un antécédent $\sqrt{y}$ si $y > 0$.

✎ **Exercice 19**
Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3 \end{cases}$$

est injective (on pourra montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet 0 ou 1 antcédent en distinguant deux cas).

Proposition 4 (CNS d'injectivité)**.**

Une application f de E dans F est une **injection** si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in E^2, f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

✎ **Exercice 20**
Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ est injective.

Remarque :
Cela permet de travailler uniquement sur les images sans avoir à compter le nombre d'antécédents de chaque élément de l'ensemble d'arrivée.

✎ **Exercice 21**
Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3 \end{cases}$$

est injective.

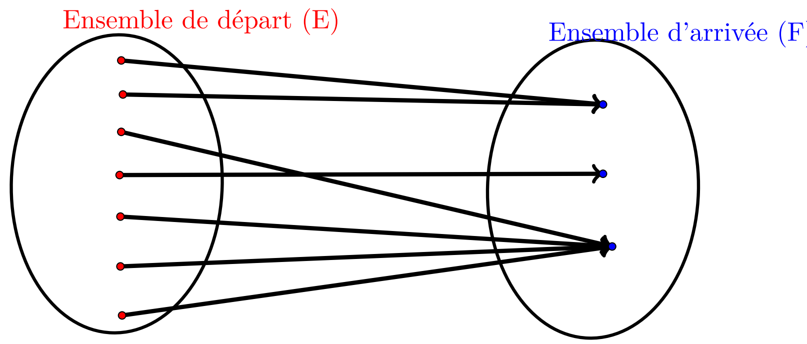
✎ **Exercice 22**
Dire si les applications données au tableau de la page 9 sont injectives ou non.

Définition 30 (Application surjective sur F)**.**

Soit f une application de E dans F. On dit que f est **surjective SUR** F (ou est une surjection de E dans F) si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E, y = f(x)$$

Autrement dit f est sujective si $f(E) = F$.



✍ **Exemple 42**

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

n'est pas surjective : -4 ne possède pas d'antécédent par f.

✍ **Exemple 43**

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est surjective.

✎ **Exercice 23**
Dire si les applications données au tableau de la page 9 sont surjectives ou non.

✎ **Exercice 24**
Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

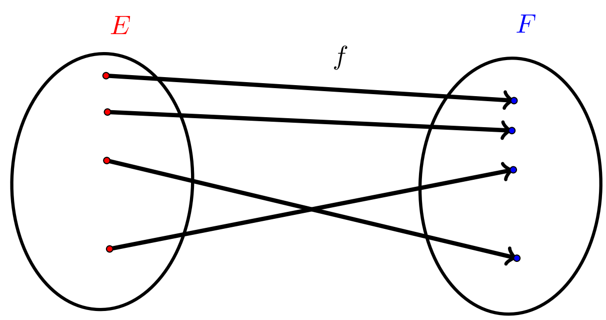
1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k \mapsto 2k \end{cases}$
2. $h : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{cases}$
3. $j : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$
4. $l : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x) \end{cases}$
5. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, x - 4y) \end{cases}$
6. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, 4x + 6y) \end{cases}$

7. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto 2x+3y \end{cases}$
8. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, 2x+3) \end{cases}$

Définition 31 (Application bijective)**.**

On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F **admet un unique antécédent** dans E :

$$\forall y \in F, (\exists\, !\, x \in E, y = f(x))$$



✍ **Exemple 44**

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

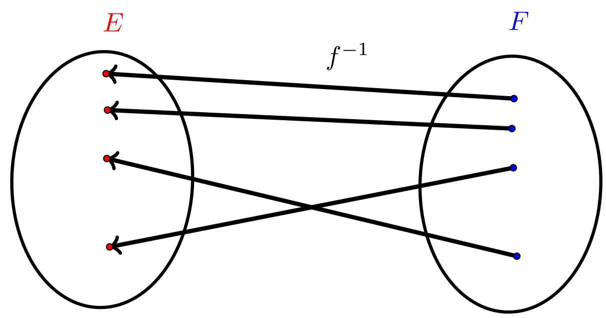
est bijective : tout élement $y \in \mathbb{R}+$ admet un unique antécedent $x = \sqrt{y}$

✎ **Exercice 25**
Dire si les applications données au tableau de la page 9 sont bijectives ou non.

Définition 32 (Application réciproque d'une bijection)**.**

Soit f une application bijective de E dans F.
L'application de F dans E qui à tout élement y de F associe son unique antécédent x de E est appelée **application réciproque** de f et notée f^{-1}. Par conséquent :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



✍ Exemple 45

$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ admet pour application réciproque la fonction $f_4^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

✎ Exercice 26

Etudier la bijectivité des applications suivantes et, le cas échéant, trouver leur réciproque : $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (2x+3y;4x-y) \end{cases}$

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto 2x+3y \end{cases}$ $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x;2x) \end{cases}$

$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x;x+3) \end{cases}$

$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (2x+3y;4x-y) \end{cases}$

✎ Exercice 27

Déterminer les fonctions réciproques des fonctions suivantes après avoir déterminé les ensemble de départ et leur image (de sorte à ce que l'application obtenue soit bijective) :

1. $f(x) = \frac{x}{1+x}$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Proposition 5 (Composée d'une application bijective et de sa réciproque)**.**

Soit f une bijection de E sur F. On a :

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$$

✍ Exemple 46

L'application exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}+^*$.
Son application réciproque est la fonction logarithme népérien, qui est une bijection de $\mathbb{R}+^*$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}+^*), y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}+^*, e^{\ln(x)} = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

Proposition 6 (CNS de bijectivité).

Soit $f : E \to F$ une application.
S'il existe $g : F \to E$ telle que
$$\forall x \in E, g(f(x)) = x$$
et
$$\forall y \in F, f(g(y)) = y$$
Alors f est bijective et $g = f^{-1}$

Proposition 7 (Composée de deux bijections).

Soit $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ bijectives et telles que $F_2 \subset E_1$.
Lq composée $f_1 \circ f_2$ est une bijection de E_2 sur F_1 et
$$(f_1 \circ f_2)^1 = (f_2)^{-1} \circ (f_1)^{-1}$$

II.5 Fonctions continues strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 1 (Théorème de la bijection)**.**

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et f une fonction **continue et strictement monotone sur** I.
L'image $J = f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur J.
De plus l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J et a même monotonie que f.

✍ **Exemple 47**
L'application exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}+^*$. Son application réciproque est la fonction logarithme népérien, qui est une bijection de $\mathbb{R}+^*$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante.

✍ **Exemple 48**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^n \end{cases}$.
La fonction f_n est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}+$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. L'application f_n est donc une bijection de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}+$ et admet une application réciproque, la fonction racine n^e.

Proposition 8 (Symétrie des courbes)**.**

Si f est une bijection d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème 2 (Dérivabilité de la réciproque)**.**

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, dérivable et dont la dérivée est continue et ne s'annule pas sur I. La fonction f^{-1} est dérivable et

$$\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\forall x \in I, \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

III Les fonctions trigonométriques réciproques

Pour définir des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, il faut trouver des intervalles sur lequels les fonctions sont continues et strictement monotones. Des choix ont été fait.

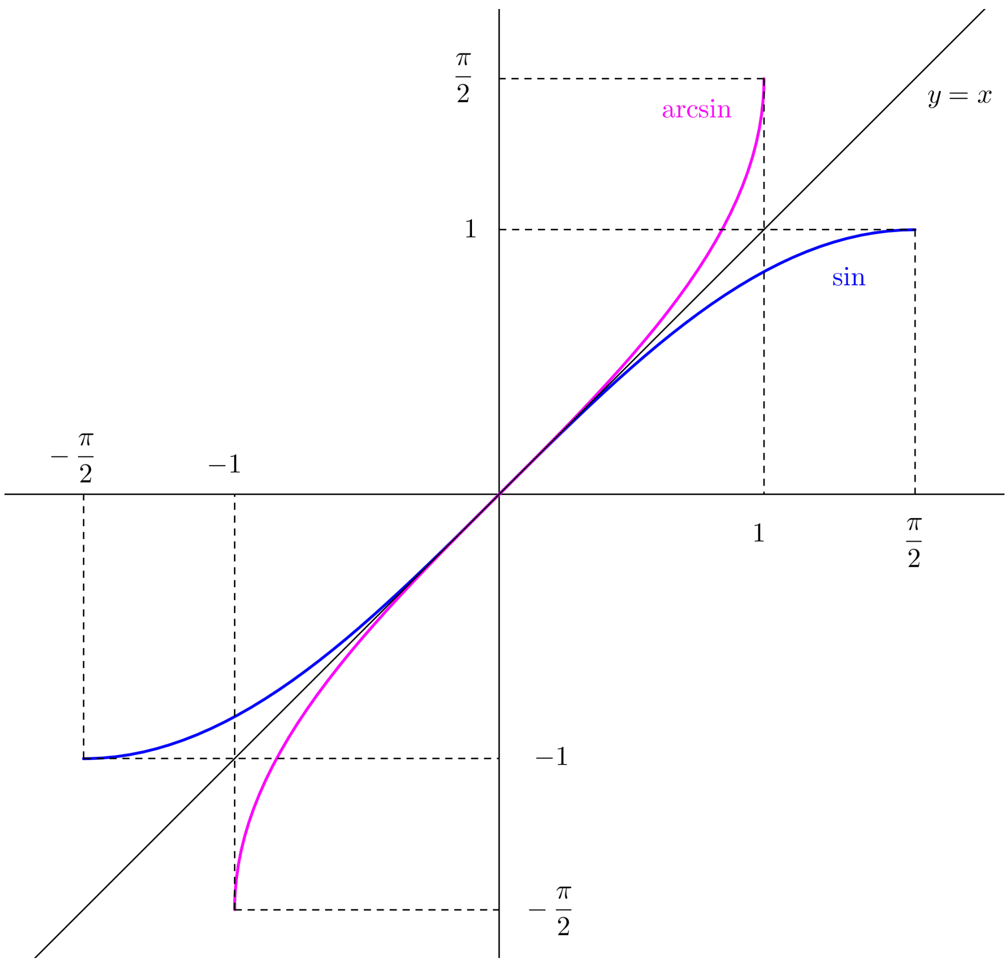
Définition 33 (La fonction Arcsinus)**.**

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et l'image de cet intervalle est $[-1;1]$. D'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arcsinus**, notée arcsin, définie sur $[-1;1]$ et d'image égale à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, continue et strictement croissante :

$$\forall (x;y)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[-1;1], y=\sin(x)\Leftrightarrow x=\arcsin(y)$$

✍ **Exemple 49**

$\arcsin(0)=\ldots$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\ldots$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots$



Remarque :

Compléter :

Pour tout $x\in\ldots\ldots$, $\sin(\arcsin(x))=x$.

Pour tout $x\in\ldots\ldots$, $\arcsin(\sin(x))=x$.

✎ **Exercice 28**
Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Théorème 3 (Dérivée de Arcsinus).

La fontion arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✎ **Exercice 29**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

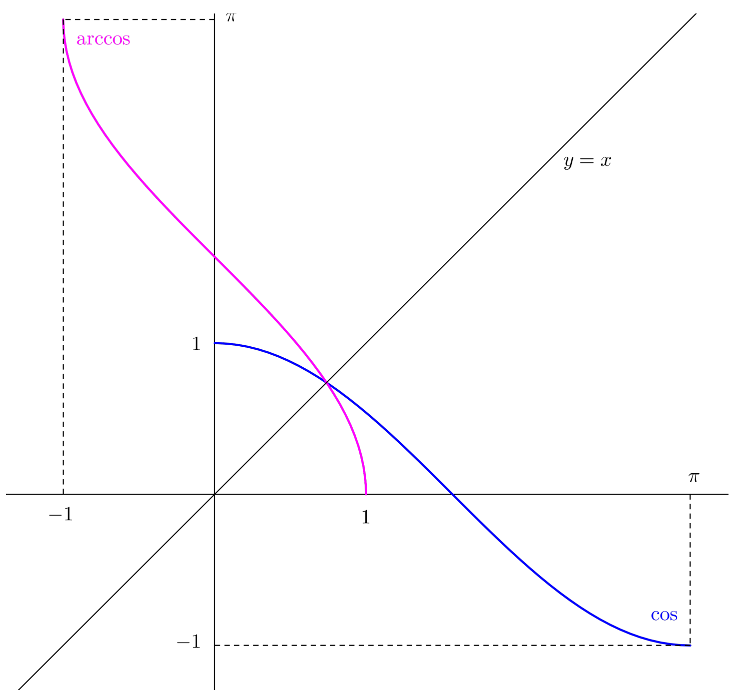
1. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{1}{5}$
3. $\sin(3x) = -\frac{1}{7}$

Définition 34 (La fonction Arccosinus).

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ d'image égale à $[-1,1]$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arccosinus**, notée arccos, définie sur $[-1,1]$ et d'image $[0;\pi]$, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

$$\forall (x;y) \in [0,\pi] \times [-1;1], y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)$$

✍ **Exemple 50**
$\arccos(1) = \dots$, $\arccos(0) = \dots$, $\arccos(-1) = \dots$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots$



Remarque :
Compléter :
Pour tout $x \in \dots\dots$, $\cos(\arccos(x)) = x$.

Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

✎ **Exercice 30**
Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Théorème 4 (Dérivée de Arccosinus)**.**

La fontion arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✎ **Exercice 31**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\cos(x) = \frac{1}{5}$
3. $\cos(-4x) = -\frac{1}{3}$

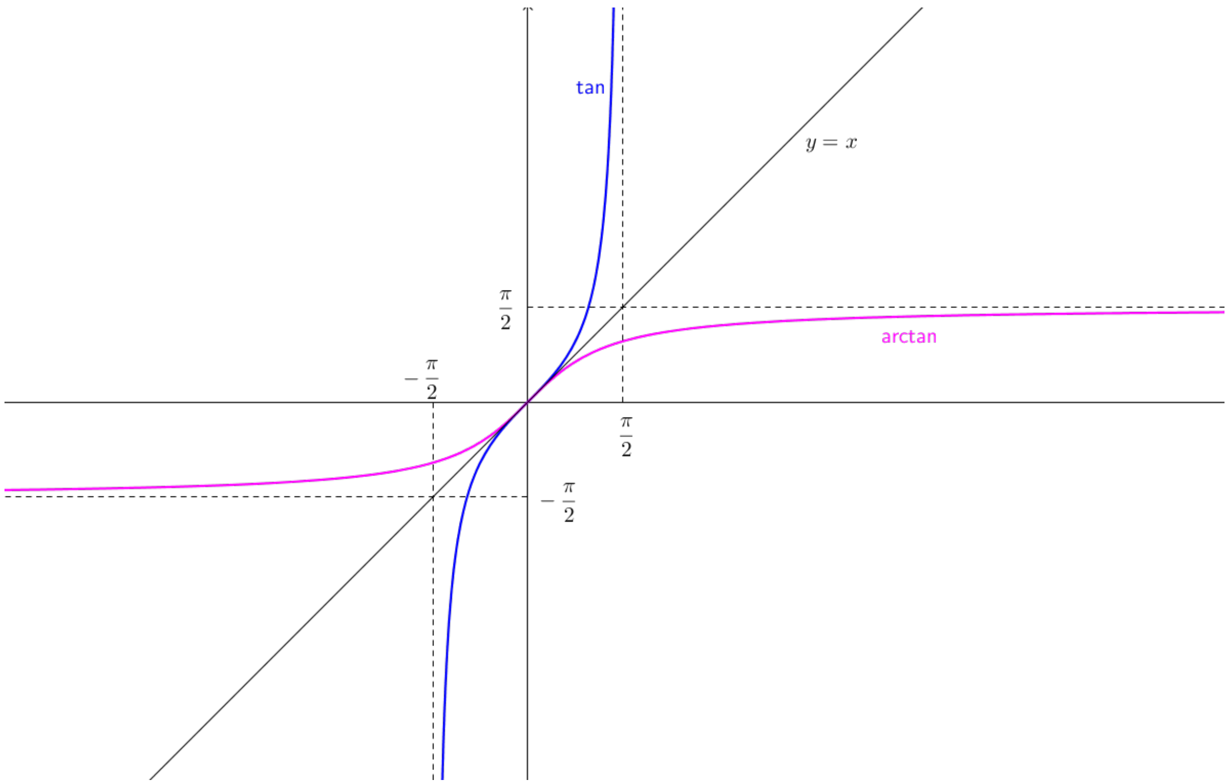
Définition 35 (La fonction Arctangente)**.**

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et l'image de cet intervalle est $]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arctangente**, notée arctan, définie sur $\mathbb{R}$, d'image égale à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x;y) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}, y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y)$$

Remarque :
Compléter :
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

✍ **Exemple 51**
$\arctan(0) = \ldots$, $\arctan(1) = \ldots$, $\arctan(-\sqrt{3}) = \ldots$



Théorème 5 (Dérivée de Arctangente)**.**

La fontion arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

✎ **Exercice 32**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\tan(x) = \frac{1}{5}$
2. $\tan(x) = -2$
3. $\tan(2x) = 500$

✎ **Exercice 33**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{x}{|x|}$$

✎ **Exercice 34**
Calculer :

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{27\pi}{4}\right)\right)$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arccos\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$

✎ **Exercice 35**
Montrer que :

Pour tout $x \in]0,1]$ $\quad \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Pour tout $x \neq 0$n

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \text{ signe de } x$$

✎ **Exercice 36**

Résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes :

1. $\cos(x) \geq \frac{4}{5}$
2. $\sin(x) \leq -\frac{6}{7}$
3. $\cos(x) > -\frac{1}{3}$
4. $\sin(2x) < \frac{3}{7}$
5. $\cos(4x) < \frac{1}{2}$
6. $\tan(x) > 1$
7. $\tan(x) \leq -9$
8. $\arcsin(x) > \frac{\pi}{3}$
9. $12\sin^2 x - \sin(x) - 1 \leq 0$
10. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$
11. $\arcsin(\tan(x)) = x$
12. $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$
13. $\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$