Chapitre 4 : Sommes et produits de nombres

Table des matières

I Notations et premières propriétés

Définition 1 (Somme et produit d'une famille de nombres réels).

Soit I un ensemble fini non vide et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.
On note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme des a_i et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit des a_i.
Si $I = \emptyset$, on convient que $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 0$

✍ **Exemple 1**
Si $I = [\![1;n]\!]$, alors

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 \cdots + a_n$
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + \cdots + 2^n$
5. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

✎ **Exercice 1**
Ecrire à l'aide du symbole somme :

1. $2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots 2^{100}$
2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \cdots + \dfrac{10}{1024}$
3. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$
4. $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Proposition 1 (Linéarité de la somme).

Soit I un ensemble fini non vide.
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles de nombres réels ou complexes, et λ un nombre réel ou complexe, on a

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i$$

et

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i$$

Remarque :
Cela s'écrit aussi

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i+b_i)=\ldots\ldots$$

✍ **Exemple 2**
Développer et simplifier au maximum (selon votre niveau de connaissances) :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^i+3^i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2\times 5^i+4i$

✎ **Exercice 2**
De manière générale pour toute constante c, simplifier :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c=\ldots$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}c=\ldots$
3. $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}c=\ldots$

Proposition 2 (Somme d'une constante).

Soit $c\in\mathbb{R}$ et $n,p\in\mathbb{N}$ tels que $p\leq n$. On a

$$\sum_{i=p}^{n}c=\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nb de termes}}\times c$$

✍ **Exemple 3**
Simplifier au maximum : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2i+3)$

✎ **Exercice 3**
Simplifier au maximum : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(3i-3)$

Proposition 3 (Propriétés du produit).

Soit I un ensemble fini non vide (composé de p éléments). Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes, et λ un nombre réel ou complexe. On a

$$\prod_{i\in I}(a_ib_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$$

et

$$\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^p \prod_{i\in I} a_i$$

✍ **Exemple 4**
Calculer :

1. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 2^i 3^i$
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda i$

✎ **Exercice 4**
Calculer :

1. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a$
2. $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} a$
3. $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a$

Proposition 4 (Relation de Chasles).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous m, p tels que $m \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

et

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{k=m}^{p} u_k \times \prod_{k=p+1}^{n} u_k$$

II Sommes de références

Proposition 5 (Somme des $n+1$ premiers entiers).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition 6 (Somme des carrés des $n+1$ premiers entiers)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✍ **Exemple 5**
Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} k^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

✎ **Exercice 5**
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Proposition 7 (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)**.**

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On a
$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Remarque :
Si u une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a
$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

✍ **Exemple 6**
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{30} 2^i$
2. $\displaystyle\sum_{i=12}^{27} 3^{2i}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} u_i$ où (u_n) est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 6.

Remarque :
Si $q = 1$,
$$\sum_{i=0}^{n} q^i = (n+1)$$

✎ **Exercice 6**
Soit $\theta \in [0; 2\pi]$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. On pourra distinguer plusieurs cas selon la valeur de θ.

Proposition 8 (Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)**.**

Soit u une suite arithmétique et $(n;p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

✍ **Exemple 7**
Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=0}^{30} i$
2. $\sum_{i=12}^{27} i$
3. $\sum_{i=1}^{20} u_i$ où (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 6.

✎ **Exercice 7**
Calculer :

1. $\sum_{i=1}^{n} 2^i + 3^i$
2. $\sum_{i=1}^{n} 2 + 6i$
3. $\sum_{i=1}^{n} 2 \times 5^i + 4i - i^2$
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$

III Transformation de sommes et de produits

Proposition 9 (Changement d'indice par translation)**.**

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, u une suite. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} = \sum_{j=p+1}^{n+1} u_j$$

(on pose $j = k+1$)
Plus généralement pour tout $i \in \mathbb{Z}$.,

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+i} = \sum_{j=p+i}^{n+i} u_j$$

(on pose $j = k+i$)

✍ **Exemple 8**
Calculer $\sum_{k=2}^{n} (k-2)^2$

✎ **Exercice 8**
Calculer $\sum_{k=0}^{n} (k+2)^2$

Proposition 10 (Changement d'indice par retournement).

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ et u une suite. On a

$$\sum_{k=p}^{n} u_{i-k} = \sum_{j=i-n}^{i-p} u_j$$

(on pose $j = i - k$)

✍ **Exemple 9**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(n-k)^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)^2$

✎ **Exercice 9**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$

Remarque :

Application : En effectuant le changement d'indice $k = n - i$ dans la somme suivante, retrouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Théorème 1.

Soit I et J deux ensembles finis et $f : I \to J$ une bijection de I sur J. Pour tout famille $(a_j)_{j\in J}$ on a :

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{f(i)}$$

Proposition 11 (Relation de Chasles).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous m, p tels que $m \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

et

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{k=m}^{p} u_k \times \prod_{k=p+1}^{n} u_k$$

✍ **Exemple 10**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k$

✎ **Exercice 10**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^2$

✍ **Exemple 11**

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

✎ **Exercice 11**

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$

Proposition 12 (Somme téléscopique)**.**

Soit u une suite et $p, n \in \mathbb{N}$. On appelle somme téléscopique une somme de la forme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ et on a :

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

✍ **Exemple 12**

En remarquant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

✎ **Exercice 12**

En utilisant une somme télescopique, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

Proposition 13 (Produit télescopique)**.**

Soit$u$ une suite de termes tous non nuls et $p, n \in \mathbb{N}$. On appelle produit téléscopique tout produit de la forme $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ et on a :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

✍ **Exemple 13**

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

✎ **Exercice 13**

Application : Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Proposition 14 (Regroupement de termes)**.**

Soit I un ensemble fini non vide, $(I_j)_{j \in [\![1;p]\!]}$ une partition de I, u une suite. On a

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i \in I_j} u_i$$

Proposition 15 (Regroupement des termes d'indice pairs et impairs)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u une suite de nombre réels. On a

$$\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$$

✍ **Exemple 14**
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$

✎ **Exercice 14**
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$

Proposition 16 (Factorisation de $a^n - b^n$)**.**

Si a et b sont deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

✍ **Exemple 15**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $a, b \in \mathbb{K}$

$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

✎ **Exercice 15**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)$ divise le polynôme $X^n - 1$

IV Sommes doubles

IV.1 Cas où les indices sont indépendants : sommes rectangulaires

Définition 2 (Somme double indexée par un rectangle)**.**

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes. On définit la **somme double** de tous les éléments de la famille :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j}$$

Proposition 17 (Cas où $I = [\![n;m]\!]$ et $J = [\![p;q]\!]$)**.**

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par le rectangle $[\![m,n]\!] \times [\![p,q]\!]$. On a

$$\sum_{(i,j)\in[\![m,n]\!]\times[\![p,q]\!]} a_{i,j} = \sum_{\substack{m\le i\le n\\ p\le j\le q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$$

✍ **Exemple 16**

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} ki$$

✎ **Exercice 16**
Calculer

$$\sum_{1\le i,j\le n} i+j$$

✍ **Exemple 17**
Calculer

$$\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j)$$

✎ **Exercice 17**
Calculer
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$$

✍ **Exemple 18**
Calculer
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$$

✎ **Exercice 18**
Calculer
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$$

Proposition 18 (Produits de deux sommes finies)**.**

Soit u et v deux suites et $m,n,p,q\in\mathbb{N}$
$$\left(\sum_{j=m}^{n} u_j\right)\left(\sum_{i=p}^{q} v_i\right) = \sum_{\substack{m\leq j\leq n\\ p\leq i\leq q}} u_i v_j$$

✍ **Exemple 19**
Calculer
$$\sum_{\substack{m\leq j\leq n\\ p\leq i\leq q}} ij$$

✍ **Exemple 20**
Soit u et v deux suites et $n\in\mathbb{N}^*$. L'égalité suivante est-elle vraie ?
$$\left(\sum_{j=0}^{n} u_j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} u_i v_i$$

✎ **Exercice 19**

1. Soit $(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3$. Développer
$$(z_1+z_2+z_3)^2$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $z_1,z_2,\dots z_n$ des nombres complexes. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j$$

IV.2 Cas où les indices sont dépendants : sommes triangulaires

Proposition 19.

Soient m et n deux entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par le triangle $\{(i,j); m\leq i\leq j\leq n\}$. On a :
$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{i,j}$$

✍ **Exemple 21**
Calculer
$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$$
et
$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j$$

✎ **Exercice 20**
Calculer
$$\sum_{1\leq i<j\leq n} i+j$$
et
$$\sum_{1\leq i<k\leq n} \frac{i}{k+1}$$

V Formule du binôme de Newton

Définition 3 (Factorielle)**.**

Soit n un entier naturel. On appelle **factorielle** n et on note $n!$ l'entier défini par :
- Si $n=0$, $0!=1$
- Si $n>0$, $n!=\prod_{i=1}^{n} i$

✍ **Exemple 22**
$1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120$

Proposition 20 (Formule de récurrence)**.**

Pour tout entier naturel n,
$$(n+1)!=(n+1)\times n!$$

✍ **Exemple 23**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Exprimer à l'aide de factorielles le produit suivant :
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

✎ **Exercice 21**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k!\leq (n+1)!$$

Définition 4 (Coefficients binomiaux)**.**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{Z}$. On note $\binom{n}{p}$, et on lit « p parmi n »,
$$\binom{n}{p}=\begin{cases}\dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0\leq p\leq n\\ 0 \quad \text{si } p<0 \text{ ou } p>n\end{cases}$$

Proposition 21 (Symétrie des coefficients binomiaux)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$. On a
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Remarque :
D'après la définition, on a :
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{0} = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\binom{0}{p} = 0$

✍ **Exemple 24**
Calculer $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$

✎ **Exercice 22**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0; n-1]\!]$.
Calculer $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Proposition 22 (Relation de Pascal)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0; n-1]\!]$
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

On en déduit le tableau bien utile, appelé **Triangle de Pascal**, qui donne la valeur de $\binom{n}{p}$ en fonction de n et p :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Remarque :
On démontre grâce à la formule de Pascal que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \leq n$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$

Proposition 23 (Formule du Capitaine)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$,
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

✎ **Exercice 23**
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$,
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Proposition 24 (La célèbre formule du binôme de Newton)**.**

Soient a et b deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarque :

On a, par symétrie des coefficients binomiaux :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

✍ **Exemple 25**

Soit $x \in \mathbb{C}$. Développer :

$(1+x)^3$, $(1-x)^3$, $(2x+3)^4$ $(1+2x)^6$, $(1+x)^7$, $(1+2x)^6$, $(1-x)^7$

✍ **Exemple 26**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^k \binom{n}{k}$