Chapitre ... : Suites de nombres réels

I Généralités

I.1 Définition

Définition 1.

On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'image de n par u.
La suite est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

I.2 Modes de définition d'une suite

Définition 2.

On dit que u est définie de manière **explicite** pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'exprime en fonction de n : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f(n)$$

La représentation graphique est alors le sous ensemble de $\mathcal{C}_f$ suivant :

$$\{(n, f(n)); n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 1
Réprésenter graphiquement les suites u définies par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2}n + 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$u_n = \sqrt{n-1}$$

Définition 3.

On dit que u est définie **par récurrence** s'il existe une fonction f à valeurs réelles telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On représente alors u à l'aide de la droite d'équation $y = x$

Exemple
Réprésenter graphiquement les suites suivantes :

1. u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
2. v la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 2)$.

Exercice 2
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Exercice 3
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et v_n définie par $v_n = u_n - 3$.

1. Calculer u_1, u_2, v_0, v_1, v_2
2. Démontrer que v est géométrique
3. En déduire v_n en fonction de n
4. En déduire u_n en fonction de n
5. Déterminer la limite de u_n

Exercice 4
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Exercice 5
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n-9}{u_n-2}$ et v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$.

1. Calculer u_1, u_2, v_0, v_1, v_2
2. Démontrer que v est arithmétique
3. En déduire v_n en fonction de n
4. En déduire u_n en fonction de n
5. Déterminer la limite de u_n

Exercice 6
Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + n + 1$
2. $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$

II Suites géométriques, arithmétiques

Définition 4.

Une suite u est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé raison de la suite u

Méthode 1.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que ce nombre ne dépend pas de n.

Proposition 1.

Si u est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ldots\ldots\ldots$$

Proposition 2.

Si u est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_p + \dots\dots$$

Définition 5.

Une suite u est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

Le réel q est appelé raison de la suite u

Méthode 2.

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que ce nombre ne dépend pas de n.

Proposition 3.

Si u est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \dots\dots\dots$$

Proposition 4.

Si u est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_p \times \dots\dots$$

Exercice 7

Déterminer la nature des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2 + u_n$.
2. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n$.
3. $u_n = 2^{2n}$.
4. $u_n = 2 \times 2^{2n}$.
5. $u_n = 5 \times 3^{n+1}$.
6. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 6$.
7. $u_n = 3^{2n+1}$.
8. $u_n = 4 + 6n$
9. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + 6$

Exercice 8 *Suites arithmétiques*

Soit u une suite arithmétique de raison r.

Donner l'expression de u_n et l'expression de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, r et u_0

Déterminer le sens de variation de u et étudier la convergence de u. On distinguera différents cas selon les valeurs de r.

Exercice 9 *Suites géométriques* 1. Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n et étudier les variations et la convergence de la suite (u_n).

(a) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, $u_0 = \frac{1}{2}$

(b) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, $u_0 = -\frac{1}{2}$

(c) $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2}$, $u_0 = 1$

(d) $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2}$, $u_0 = -1$

(e) $u_{n+1} = -u_n$, $u_0 = 1$

(f) $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$, $u_0 = -1$

(g) $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n$, $u_0 = 1$

(h) $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$, $u_0 = 1$

(i) (u_n) est arithmétique, $u_3 = \frac{2}{3}$ et $u_{11} = 0$

(j) (u_n) est géométrique, $u_3 = \frac{3}{16}$ et $u_{10} = \frac{1}{16}$

2. Soit u une suite géométrique de raison q.
Donner l'expression de u_n et l'expression de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, q et u_0.
Déterminer le sens de variation de u et étudier la convergence de u. On distinguera différents cas selon la valeur de q et u_0.

III Suites extraites

Définition 6.

Soit u une suite. On appelle **suite extraite** de u toute suite du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple
Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes de rangs pairs et de rangs impairs.

Exercice 10
Soit u la suite définie par $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.
Déterminer les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

IV Opérations

Définition 7.

Si u et v sont deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit les suites

$$u + v : n \mapsto u_n + v_n$$

$$u \times v : n \mapsto u_n \times v_n$$

$$\lambda u : n \mapsto \lambda u_n$$

V Monotonie

V.1 Définition

Définition 8.

On dit que u est **croissante** (respectivement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$)

Définition 9.

On dit que u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple
La suite définie par $u_n = n$ est croissante.
La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.

Définition 10.

On dit que u est **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Définition 11.

On dit que u est **strictement croissante** (respectivement strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$)

Définition 12.

On dit que u est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

VI Méthodes pour étudier la monotonie éventuelle

Méthode 3.

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 11
Etudier la monotonie de la suite u définie par $u_n = 2n + \sin(n)$.
Etudier la monotonie de la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Méthode 4 (Si u est définie de manière explicite).

Etudier le sens de variations de la fonction f définissant la suite.

Proposition 5.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Soit u la suite définie par $u_n = f(n)$.
Si la fonction f est croissante (resp. strictement croissante) alors u est croissante (resp. strictement croissante).
Si la fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) alors u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque :
La réciproque est fausse. Exemple : $f(x) = x \times \cos(2\pi x)$ La suite définie par $u_n = f(n)$ est strictement croissante mais f n'est pas monotone !

Remarque :
Attention : ne pas confondre avec l'étude de la monotonie des suites définies par récurrence ! Dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut avoir f croissante mais u décroissante !!

Exercice 12
Etudier la monotonie de u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2n$.
Etudier la monotonie de u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$

Méthode 5 (Si la suite est strictement positive).

Si la suite est **strictement positive**, étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Exercice 13
Etudier la monotonie de la suite v définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$.
Etudier la monotonie de la suite v définie par $v_n = \frac{2^n}{n!}$

Méthode 6 (Si u est définie par récurrence).

Pour démontrer que la suite est croissante (resp décroissante), on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$). Pour vous guider, utiliser la proposition suivante mais il est conseillé de redémontrer le résulats dans chaque cas particulier.

Proposition 6.

Soit u une suite u est définie par la relation de récurrence$u_{n+1} = f(n)$.
Si f est croissante alors u est monotone (monotonie à déterminer grâce aux deux premiers termes).
Si f est décroissante alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de monotonie contraires et u n'est pas monotone.

Méthode 7.

Voir la fiche méthode d'étude des suites récurrences.

Exercice 14
Etudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Etudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Exercice 15
Etudier la monotonie de la suite dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $u_n = (-1)^n + n$
2. $u_n = 2n - 1$
3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. $u_n = (-1)^n$
5. $u_n = 3n - 1$
6. $u_n = 2^n$
7. $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
8. $u_n = \frac{e^n}{n}$
9. $u_n = n^2 - 4n - 1$
10. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$
11. $u_n = n + \cos(n)$
12. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
13. $u_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3}$
14. $u_n = \cos\left(\frac{3}{n}\right)$

Exercice 16
Etudier la monotonie des suites définies par récurrence de la manière suivante :

1. $u_{n+1} = u_n + 2n$ et $u_0 > 0$
2. $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ et $u_0 > 0$
3. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 4$
4. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$

VI.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 13.

On dit qu'une suite u est

1. **Majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé un majorant de u.
2. **Minorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé un minorant de u.
3. **Bornée** si elle est majorée et minorée.

Exercice 17
Les suites suivantes sont-elle majorées ? minorées ?
$u_n = n^2$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = 2^n$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 18
Montrer qu'une suite croissante est minorée et trouver un minorant.
Montrer qu'une suite décroissante est majorée et trouver un majorant.

Proposition 7.

Une suite u est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M$$

Exemple
Montrer que la suite définie par $u_n = (-1)^n \frac{3n^2}{n^2+1}$ est bornée.
Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n+1} - 2\cos(n)$ est bornée.

Exercice 19
Dire si les suites suivantes sont bornées

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
2. $u_n = (-2)^n$
3. $u_n = (-1)^n \sin(n) + 2\cos(n)$
4. $u_n = 2n$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+2}{n^2}$
6. $u_n = e^{\frac{2}{n}}$
7. $u_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{n}}$
8. $u_n = \frac{2n-3}{5n+1}$
9. $v_n = \frac{n\sin(n)}{1+n^2}$
10. $w_n = n\sin(n)$
11. $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

VII Limites de suites

VII.1 définition

Définition 14.

Soit u une suite.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que u admet pour limite l si :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}+^*), (\exists N \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

2. On dit que u admet pour limite $+\infty$ si :

....

3. On dit que u admet pour limite $-\infty$ si :

....

Définition 15.

On dit qu'une suite est **convergente** lorsqu'elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** dans le cas contraire (c'est-à-dire lorsqu'elle n'admet pas de limite ou qu'elle admet $\pm\infty$ comme limite).

Proposition 8.

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède une limite alors celle ci est **unique**. On la note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Remarque :
Si u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors $|u|$ tend vers $|l|$.
La réciproque est fausse.
Ex : $(-1)^n$.
En revanche u tend vers 0 si et seulement si $|u|$ tend vers 0.

Remarque :
Soit u une suite et $l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n - l = 0.$$

Exemple
Montrer que $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$.

VII.2 Propriétés des suites admettant une limite

Proposition 9.

Toute suite convergente est bornée.

Remarque :
La réciproque est fausse. Ex : $(-1)^n$.

Proposition 10.

Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.
Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Proposition 11.

Soit u une suite admettant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Toute suite extraite de u admet aussi pour limite l.

Méthode 8 (Pour montrer qu'une suite diverge).

On exhibe deux suite extraites qui convergent vers deux limites différentes.

Exemple
$(-1)^n$

Proposition 12.

Soit u une suite.
Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite alors la suite converge et sa limite est la limite commune de (u_{2n}) et (u_{2n+1})

VII.3 Limites classiques

Proposition 13.

Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$
2. Si $a = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = 1$
3. Si $a > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$
4. Si $a < -1$, alors la suite (a^n) n'admet pas de limite.

Exercice 20
Soit $a \in]-1; 1[$. Déterminer la limite de a^{2n}.

VII.4 Opérations sur les limites

VII.4.1 Limite d'une somme

Proposition 14.

Soient u et v deux suites admettant une limite (finie ou infinie). La limite de $u+v$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u+v)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

VII.4.2 Limite d'un produit

Proposition 15.

Soient u et v deux suites admettant une limite (finie ou infinie). La limite de uv est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	∞	∞
$\lim(u \times v)$	ll'	∞	?	∞

VII.4.3 Limite d'un quotient

Proposition 16.

Soient u une suite admettant une limite (finie ou infinie). La limite de $\frac{1}{u}$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim u$	$l \neq 0$	0^+	0^-	∞
$\lim v$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

La limite d'un quotient se déduit des tableaux donnant la limite d'un produit et de l'inverse puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

Proposition 17.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	l	l ou ∞	l ou ∞	0	∞	∞
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}^*$	∞	0^+	$0-$	0	∞	$l \neq 0$
$\lim \dfrac{u}{v}$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	?	?	∞

Exercice 21
Déterminer les limites suivantes :

1. $u_n = 3n^2 + \sqrt{n} - 7$
2. $v_n = 2n^2 - 3n + 5$
3. $w_n = \sqrt{n}(3n^2 - 7)$
4. $z_n = \frac{1}{n}(5n^2 + 1)$
5. $k_n = \frac{0{,}6^n}{0{,}5^n}$
6. $u_n = \frac{2n^2-4n+5}{8n^3-3n^2+15n}$
7. $u_n = n\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{}$
8. $u_n = \frac{1}{(-1)^n \sin(\frac{1}{n})}$

Proposition 18.

Soit u une suite de limite $l \in \overline{R}$ et une fonction de limite L en l. La suite $(f(u_n))$ admet L pour limite.

Exercice 22
Trouver les limites suivantes :

1. $u_n = e^{-n^2}$
2. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $u_n\sqrt{n+1}$
4. $u_n\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Proposition 19 (Conséquence)**.**

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.
Si u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $f(l) = l$.

Exemple
Limites possibles pour les suites definies par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 1$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$

VII.5 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 20.

Soient u et v deux suites convergeant respectivement vers l et l'.

1. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$
2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$, alors $l \leq M$
3. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq m$, alors $l \geq m$

Remarque :
Attention le passsage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Exemple $u_n\frac{1}{n}$.

VIII Théorèmes d'existence d'une limite

VIII.1 Théorème d'encadrement

Théorème 1.

Soient u, v et w trois suites et $l \in \mathbb{R}$. Si u et w sont telles que

1. $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
2. u et w ont pour limite l.

Alors v est convergente et a pour limite l.

Exercice 23
$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^3} + 3$

Proposition 21.

Soit u une suite et (ϵ_n) une suite qui tend vers 0.
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq \epsilon_n$ alors u converge vers 0.

Exemple
$u_n = \frac{5\cos(n^2) - 6\sin(e^n)}{\sqrt{n}}$

Exercice 24
Montrer que la suite $\frac{\sin(2n)+\cos(n)}{n^2}$ converge vers 0.

Exercice 25
Déterminer la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$

Exercice 26
Déterminer la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{2n^2 - cos(n)}{n^2-n+8}$

VIII.2 Théorèmes de minoration et de majoration

Théorème 2.

Soient u, v sont deux suites telles que

1. $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
2. u diverge vers $+\infty$.

Alors v diverge vers $+\infty$.

Exemple
Montrer que $n!$ admet pour limite $+\infty$.

Théorème 3.

Soient u, v sont deux suites telles que

1. $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
2. v diverge vers $-\infty$.

Alors u diverge vers $-\infty$.

VIII.3 Théorèmes de la limite monotone

Théorème 4.

Soit u une suite monotone. Alors u est convergente si et seulement si u est bornée.

Théorème 5.

Soit u une suite croissante de nombre réels.
- Si u est majorée alors elle est convergente.
- Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$

Démonstration :

Exemple
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ Montrer que la suite u est majorée par 4 puis montrer que u est convergente.

Théorème 6.

Soit u une suite décroissante de nombre réels.
- Si u est minorée alors elle est convergente.
- Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $+\infty$

VIII.4 Suite dont les suites extraites de rangs pairs et impairs comvergent vers une même limite

Proposition 22.

Soit u une suite telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ admettent pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors u admet également pour limite l.

Démonstration :

Exemple
On définit une suite par $u_{2n} = \frac{2n+3}{4n}$ et $u_{2n+1} = \frac{n-5}{2n+1}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

VIII.5 Théorème des suites adjacentes

Définition 16.

Deux suites u et v sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

Exemple
Montrer que les suites u et v définies par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ et $v_n = \frac{2^{n+1}+3}{2^n}$ sont adjacentes

Proposition 23.

Si u et v sont adjacentes avec u croissante et v décroissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 7.

Si u et v sont deux suites adjacentes alors u et v convergent et ont même limite.

Exemple
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 27
Soient $0 < a < b$ et (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
Prouver que u et v sont adjacentes.

Exercice 28
Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.

Exercice 29
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - n$	3. $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2+2n-1}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+3}$	5. $\lim_{n\to+\infty} 2^n$	6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-3^n}{3^n-4^n}$
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1}$	8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{4}$	9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$

Exercice 30
Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
Montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente. Indication : monter qu'elle est croissante et majorée.

Exercice 31
Soit u_n une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2^n}$
2. Quel est le sens de variation de v ?
3. Majorer la quantité $v_{n+1} - v_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0 + 2$.
5. Montrer que la suite v est convergente.
6. En déduire que la suite u est convergente.

Feuille méthode : Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans tout la fiche, on étudie une suite u une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

Etape 1 (incontournable) : Montrer que la suite est bien définie

Exemple
Les suites suivantes sont-elles bien définies ?

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{v_n - 1} \end{cases}$$

Exercice 32
Soit w la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{w_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que la suite w est bien définie.

Exercice 33
Soit z la suite définie par

$$\begin{cases} z_0 = 1,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \sqrt{2 - z_n} \end{cases}$$

Montrer que z est bien définie.

Etape 2 : Etude de la monotonie : escaliers, escargots et compagnie

Proposition 24.

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0. Si f est croissante sur I alors u est monotone.

Méthode 9.

Si la suite f est croissante, on trouve les variations de u en comparant u_0 et u_1.
- Si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$
- Si $u_0 \geq u_1$, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$

Exercice 34
Etudier la monotonie de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 0$.

Exercice 35
Etudier la monotonie de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ selon la valeur de u_0.

Proposition 25.

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0. Si f est décroissante sur I alors que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Exercice 36
Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}$.
Etudier la monotonie des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Proposition 26.

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \leq 0$ alors u est décroissante. Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \geq 0$ alors u est croissante

Exercice 37
Soit v la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$. Montrer que la suite est bien définie puis étudier sa monotonie.

Etape 3 : Etude de la convergence

Proposition 27.

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0. Supposons que f est continue sur I.
Si la suite u converge alors sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 38
Démontrer ce résultat.

Exercice 39
Soit u la suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite u est bien définie.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Remarque :
Si la fonction f n'a pas de point fixe alors on est assuré que la suite u diverge.

Exercice 40
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode 10.

Si u est monotone on essaie d'appliquer le théorème de convergence monotone pour l'existence de la limite puis on détermine la limite en étudiant les points fixes de f. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et on peut essayer de montrer qu'elles convergent.

Exercice 41
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

Cas des applications contractantes

Un cas particulier important est celui d'un suite récurrente pour qui on peut montrer une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$$

Exercice 42
Etudier les suites récurrentes suivantes :

1. u définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \\ u_0 \geq -1 \end{cases}$
2. v définie par $\begin{cases} v_{n+1} = \cos(v_n) \\ v_0 = 0 \end{cases}$

Exercices bilan

Exercice 43

Soit u_n la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement u.
2. Montrer que la suite u est bien définie.
3. Etudier le sens de variation de u.
4. Montrer que u est majorée par 2.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$
7. Conclure

Exercice 44

Soit u_n la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement u.
2. Etudier le sens de variation de u.
3. Démontrer que la suite v définie par $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
6. Etudier le comportement asymptotique de u.