Chapitre 1 : Trigonométrie

I Cercle trigonométrique

I.1 Définition

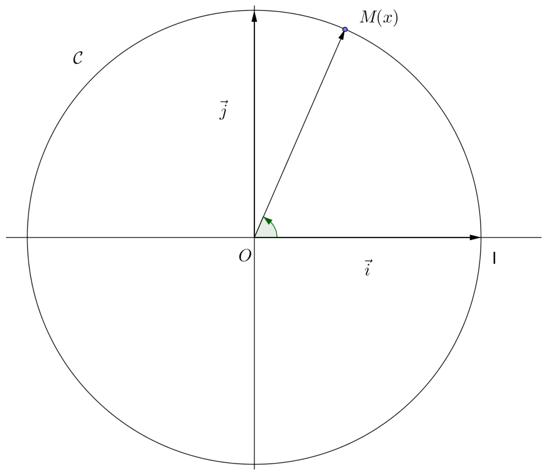
On fixe $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On note I le point de coordonnées $(1;0)$ dans ce repère.

Définition 1.

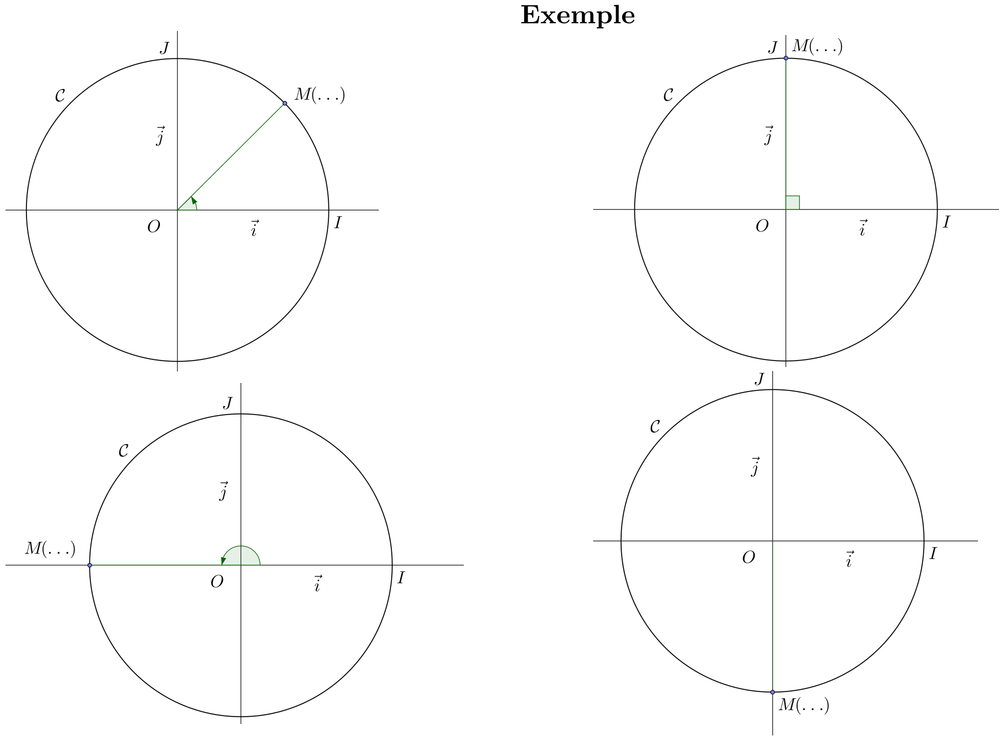
Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens **direct**, c'est à dire dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.
Considérons un point mobile M se déplaçant sur le cercle $\mathcal{C}$ et situé initialement au point I.

- Si $x \geq 0$, le point mobile parcourt $\mathcal{C}$ dans le sens direct et s'arrête après avoir parcouru une distance x.
- Si $x \leq 0$, le point mobile parcourt $\mathcal{C}$ dans le sens indirect et s'arrête après avoir parcouru une distance $|x| = -x$

On note $M(x)$ le point d'arrivée et on dit que $M(x)$ est l'**image** de x sur $\mathcal{C}$.



Exemple



Remarque :
Chaque réel x possède une **unique** image $M(x)$ sur $\mathcal{C}$ mais tout point $M \in \mathcal{C}$ est l'image d'une **infinité** de nombres réels. Si on note x_0 un réel d'image M alors M est aussi l'image de tous les réels de la forme $x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.

Soit M un point de $\mathcal{C}$. Si x est un réel tel que M soit l'image de x sur $\mathcal{C}$, alors x est une mesure **en radians** de l'angle **orienté** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque :
L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ a une infinité de mesures. Si x_0 est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_0 + 2k\pi$ en est une autre.

Définition 2.

La mesure d'un angle orienté qui appartient à $]-\pi;\pi]$ est appelée **mesure principale** de l'angle orienté.

Exemple
Donner la mesure principale des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ pour les points M de l'exemple précédent :

1. .... 2. ....
3. .... 4. ....

I.2 Sinus et cosinus d'un nombre réel

Définition 3.

Soit x un nombre réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique.
On appelle **cosinus** de x (et on note $\cos(x)$) l'abscisse de $M(x)$ et **sinus** de x (et on note $\sin(x)$) l'ordonnée de $M(x)$. Lorsque cela a un sens, on définit la **tangente** de x (que l'on note $\tan x$) par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 2.

Pour tout réel x,
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

I.3 Cosinus et sinus dans le triangle rectangle

Théorème 1.

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique image de x. Considérons le triangle OAM rectangle en A tel que $A \in [0I)$. On a alors

1. $\cos(x) = \frac{OA}{OM}$
2. $\sin(x) = \frac{AM}{OM}$
3. $\tan(x) = \frac{AM}{OA}$

Application : Méthode d'archimède

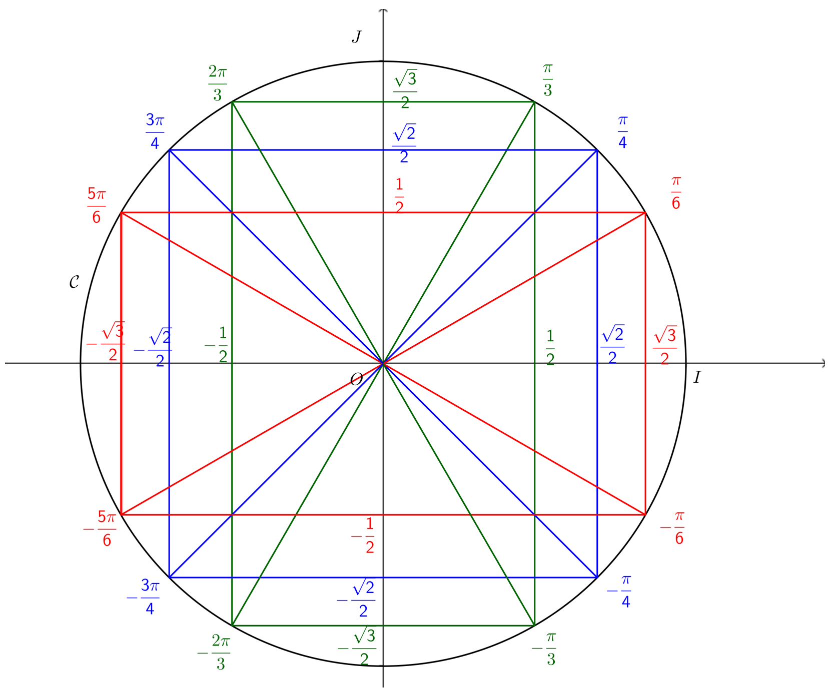
I.4 Valeurs usuelles

Le tableau suivant est à connaître par coeur :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
$\cos x$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
$\tan x$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$

Démonstration :
Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Démonstration :
Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



II Fonctions trigonométriques

II.1 Définitions

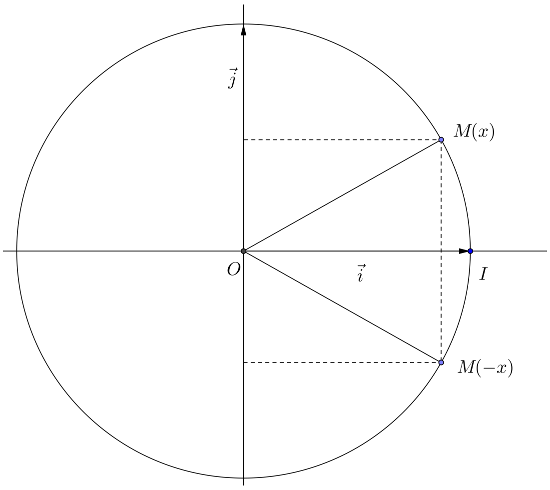
Définition 4.

La fonction cos est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
La fonction sin est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$.
La fonction tan est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ qui à x associe $\tan(x)$.

II.2 Parité, imparité

Proposition 3.

La fonction cos est **paire** : pour tout réel x, $\cos(-x) = \dots\dots\dots$
La fonction sin est **impaire** : pour tout réel x, $\sin(-x) = \dots\dots\dots$
La fonction tan est .... : pour tout réel x n'appartenant pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = \dots\dots\dots$



II.3 Périodicité

Proposition 4.

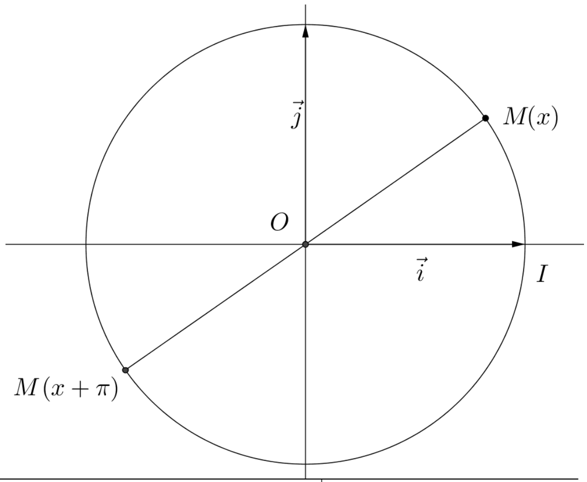
Les fonction cos et sin sont 2π**-périodiques :**
pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
La fonction tan est ...**-périodique :**
pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, \tan(x + \dots) = \tan(x)$

II.4 Autres propriétés de symétrie

Pour tout réel x,

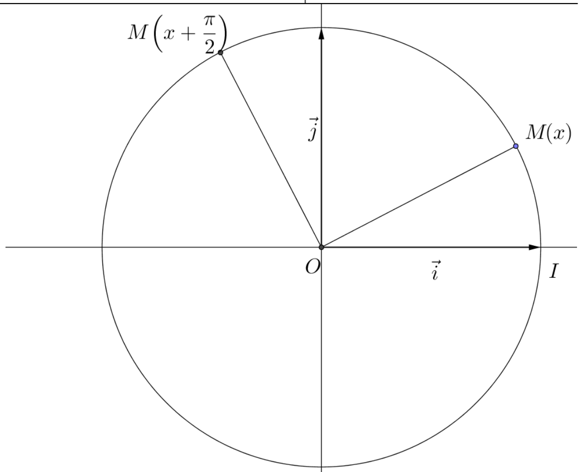
$\cos(x+\pi) = \dots$

$\sin(x+\pi) = \dots$



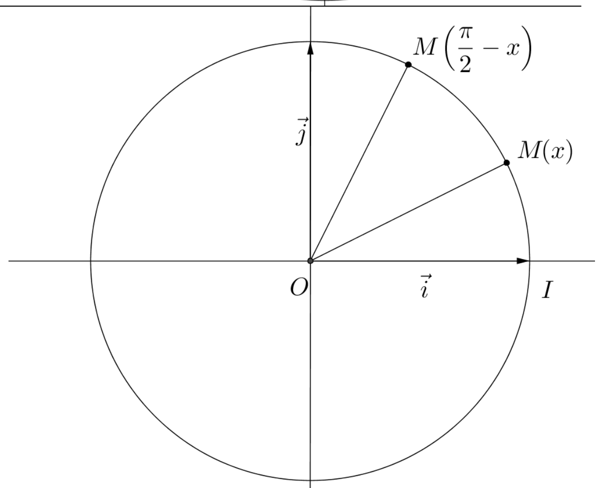
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \dots$

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \dots$



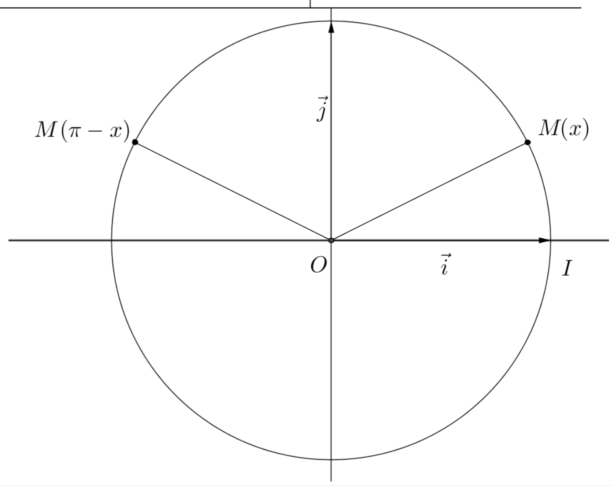
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \dots$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \dots$



$\cos(\pi-x) = \dots$

$\sin(\pi-x) = \dots$



II.5 Formules d'addition et conséquences

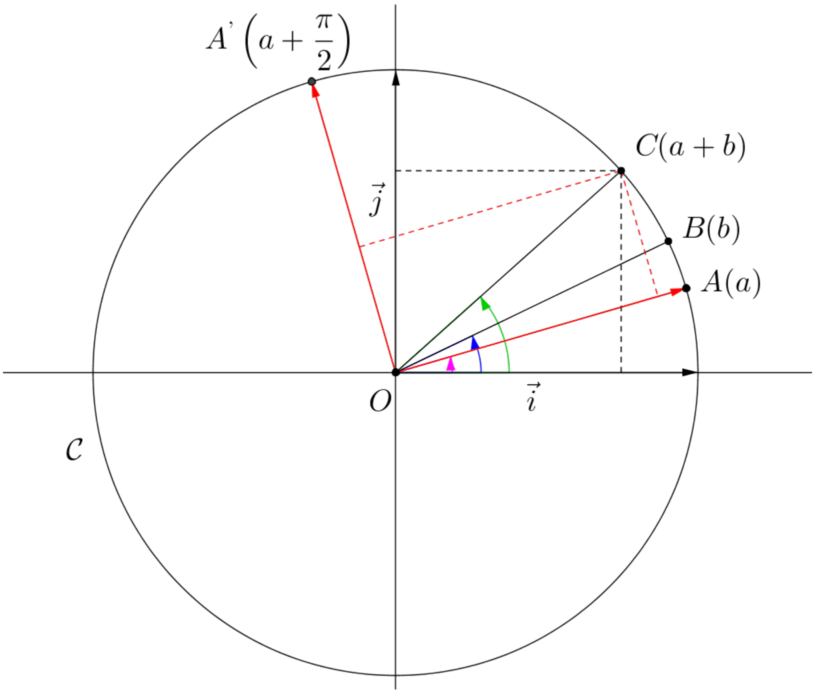
Proposition 5.

Pour tous réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Démonstration :



Proposition 6.

Pour tous réels a et b tels $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ existent, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Démonstration :

Exercice 1
En déduire $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, et $\tan(a-b)$

Application : en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$

Exercice 2
Déduire des formules d'addition les **formules de duplication** :

$$\cos(2x) = \dots$$

et

$$\sin(2x) = \dots$$

Exercice 3
Déduire des formules de duplication les **formules de linéarisation** :

$$\cos^2(x) = \dots$$

et

$$\sin^2(x) = \dots$$

puis calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 4
En utilisant les formules d'addition, montrer les **formules de linéarisation** suivantes :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin(b)\cos(a) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

Exercice 5
En utilisant les identités $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$ et les formules d'addition, factoriser $\sin(p) + \sin(q)$, $\sin(p) - \sin(q)$, $\cos(p) + \cos(q)$, et $\cos(p) - \cos(q)$
Transformation de somme en produit :

$$\sin(p) + \sin(q) =$$

$$\sin(p) - \sin(q) =$$

$$\cos(p) + \cos(q) =$$

$$\cos(p) - \cos(q) =$$

II.6 Expression de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

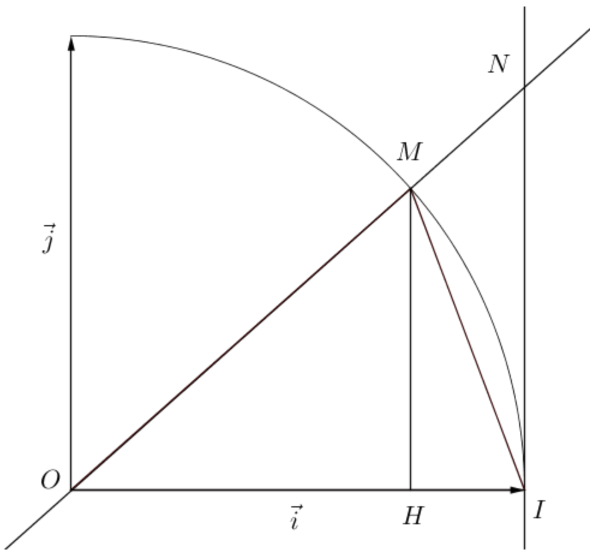
Simplifier les expressions suivantes : $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1-t^2}$

II.7 Dérivées et variations

Lemme 1.

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,
$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

Démonstration :



Proposition 7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Démonstration :

Proposition 8.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

Démonstration :

Théorème 2.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

et

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Démonstration :

On en déduit les variations des fonctions cos et sin sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1	↗	1	↘	-1

Remarque :
On aurait pu se limiter à dresser le tableau de variations de cos et sin sur $[0;\pi]$ puisque la fonction cos est paire et que la fonction sin est impaire.

On trouve aussi les variations de tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan$	$-\infty$	↗	$+\infty$

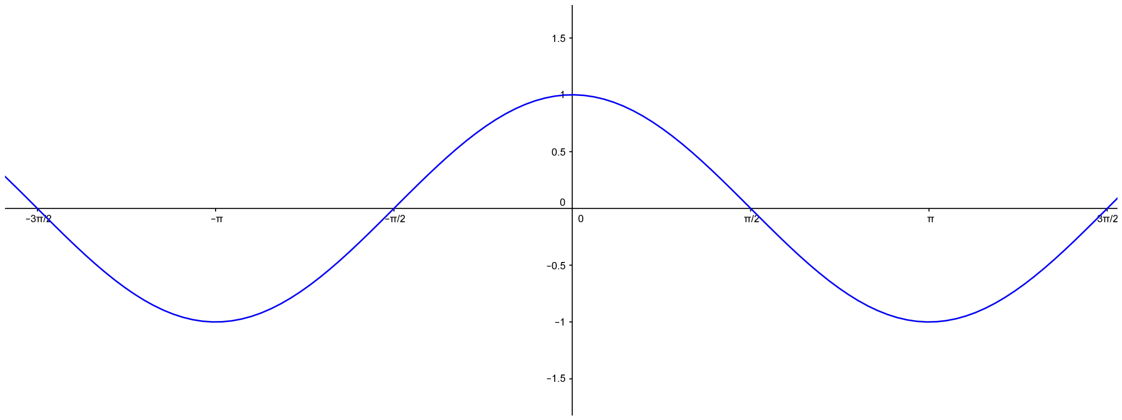


FIGURE 1 – Fonction cosinus

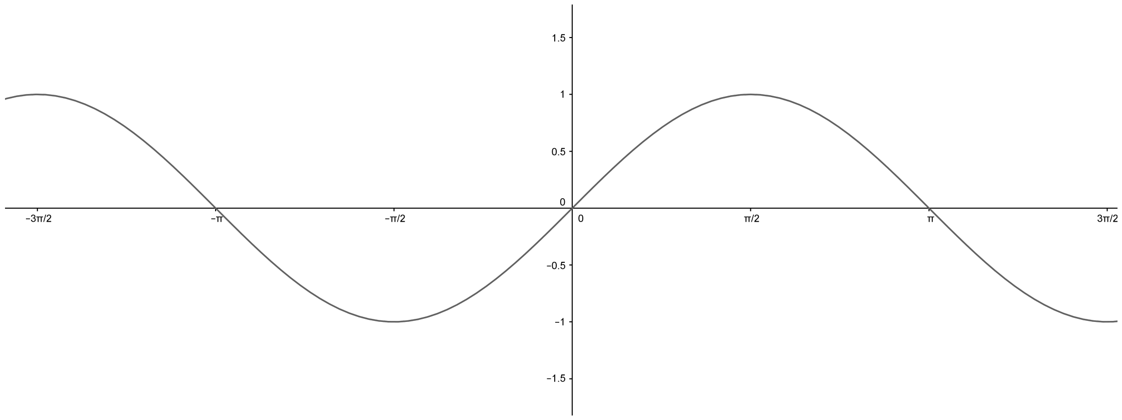


FIGURE 2 – Fonction sinus

II.8 Inégalités et limites classiques

Proposition 9.

$$\text{Pour tout réel strictement positif } x, \quad \sin(x) < x$$

$$\text{Pour tout } x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad x < \tan(x)$$

Proposition 10.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

Exercice 6
Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

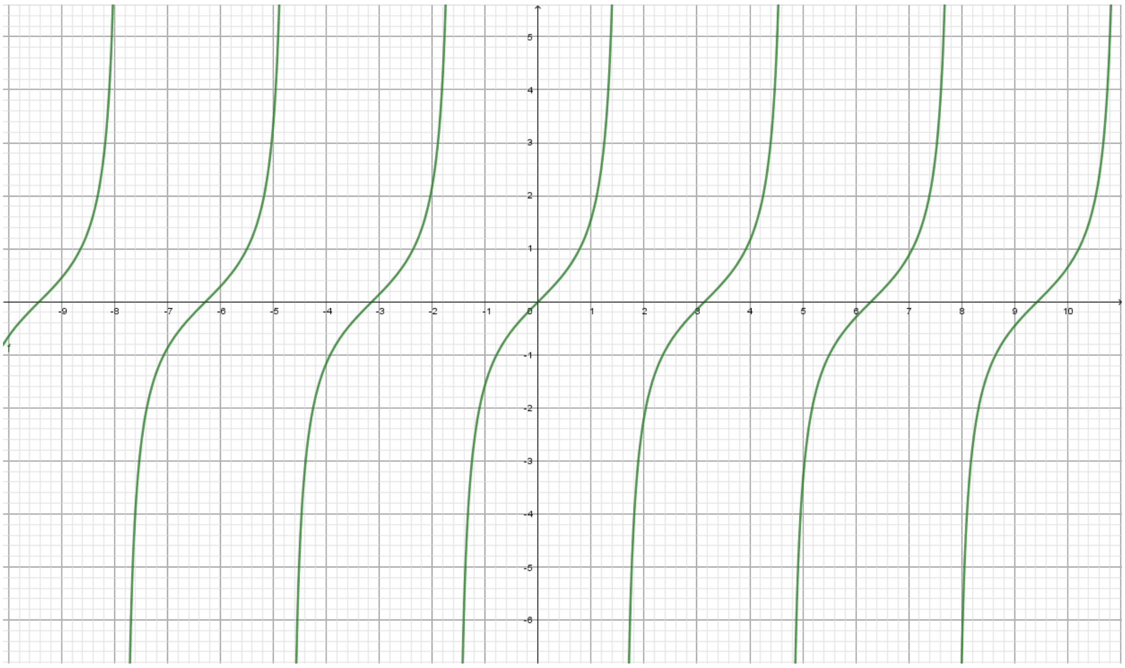


Figure 3 – Fonction tangente

III Equations trigonométriques

Proposition 11.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (\cos a = \cos b) \Leftrightarrow (a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :

Proposition 12.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (\sin a = \sin b) \Leftrightarrow (a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :

Proposition 13.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}, (\tan a = \tan b) \Leftrightarrow (a = b + k\pi ; k \in \mathbb{Z})$$

Exemple :