Chapitre 2 : Trigonométrie

Table des matières

I Cercle trigonométrique

On fixe $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Définition 1 (Cercle trigonométrique)**.**

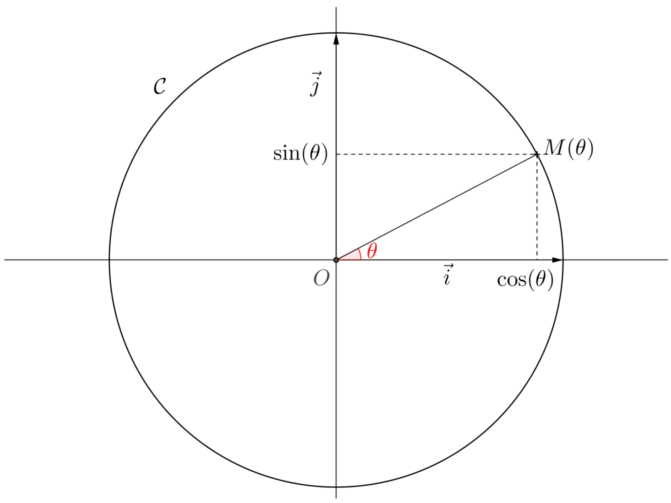
Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Ce cercle a pour équation cartésienne $x^2+y^2=1$.

Définition 2 (Cosinus et sinus d'un nombre réel)**.**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $M(\theta)$ le point du cercle trigonométrique vérifiant $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\theta$.

— Le **cosinus** de θ, noté $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point $M(\theta)$

— Le **sinus** de θ, noté $\sin(\theta)$ est l'ordonnée du point $M(\theta)$



Définition 3 (Congruence modulo 2π)**.**

Soit x et y deux nombres réels. On dit que x et y sont **congrus modulo** 2π s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=y+k\times 2\pi$. On note $x\equiv y \quad [2\pi]$.

Proposition 1 (Nombres de même image sur le cercle trigonométrique)**.**

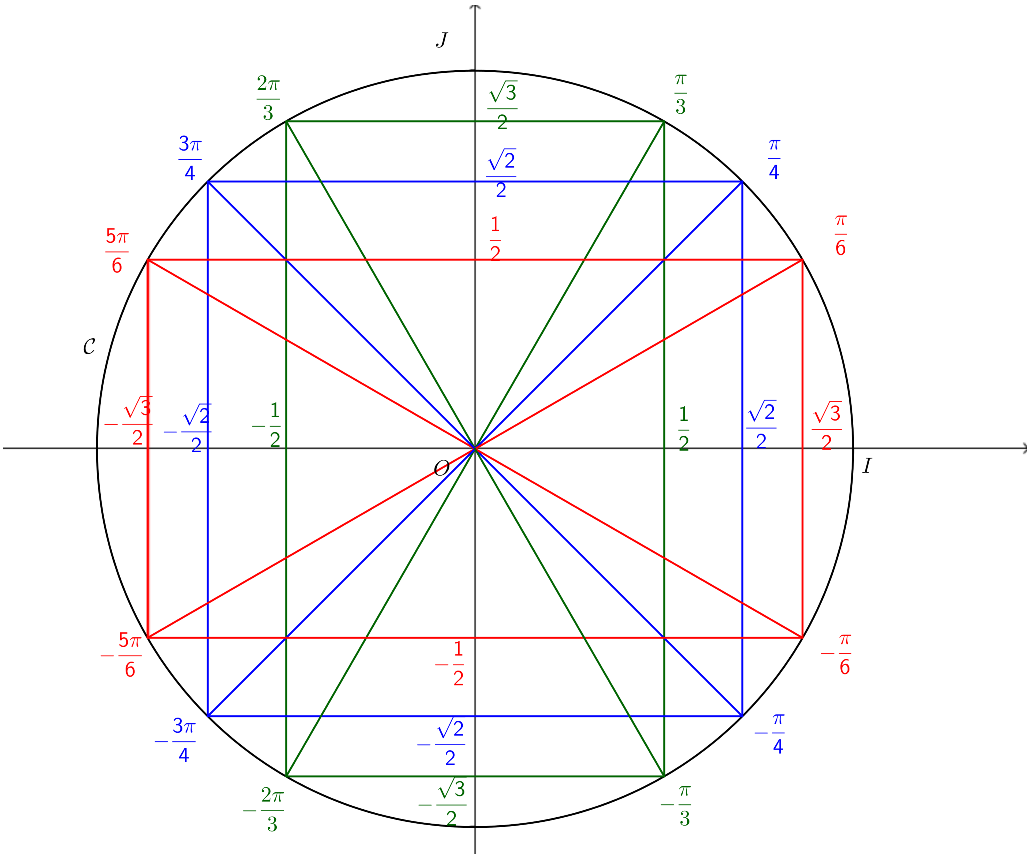
Soit θ et θ' deux nombres réels. On a

$$M(\theta)=M(\theta')\Leftrightarrow \theta\equiv\theta' \quad [2\pi]$$

Remarque :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$

Proposition 2 (Relation fondamentale entre cos et sin)**.**

Pour tout réel x,
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	……	……	……	……	……
$\sin(x)$	……	……	……	……	……
$\tan(x)$	……	……	……	……	……

II Fonctions trigonométriques

Définition 4 (Fonctions trigonométriques)**.**

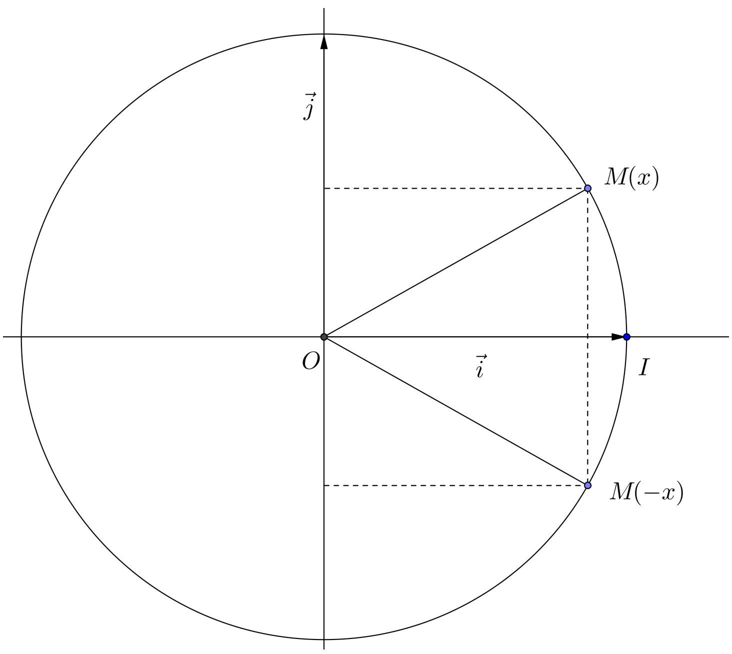
La fonction cos est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
La fonction sin est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$.
La fonction tan est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ qui à x associe $\tan(x)$.

Proposition 3 (Périodicité des fonctions trigonométriques)**.**

Les fonction cos et sin sont 2π**-périodiques :**
pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
La fonction tan est ...**-périodique :**
pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, \tan(x + \dots) = \tan(x)$

Proposition 4 (Parité de cos, imparité de sin)**.**

La fonction cos est **paire** : pour tout réel x, $\cos(-x) = \dots\dots$
La fonction sin est **impaire** : pour tout réel x, $\sin(-x) = \dots\dots$
La fonction tan est .... : pour tout réel x n'appartenant pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = \dots\dots$

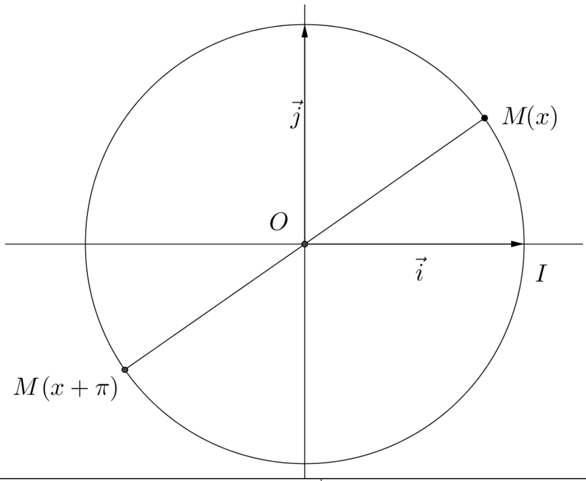


Proposition 5 (Autres propriétés de symétries).

Pour tout réel x,

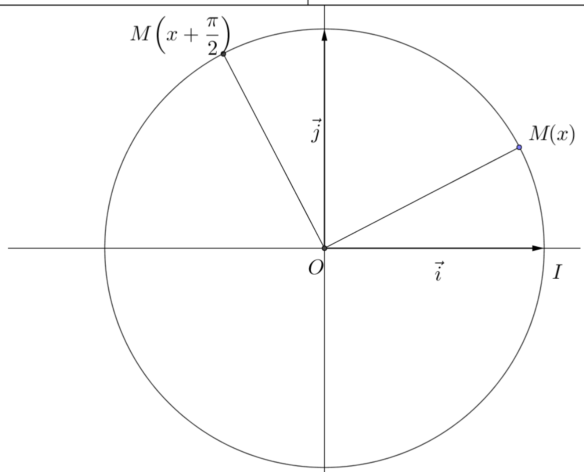
$\cos(x+\pi) = \dots$

$\sin(x+\pi) = \dots$



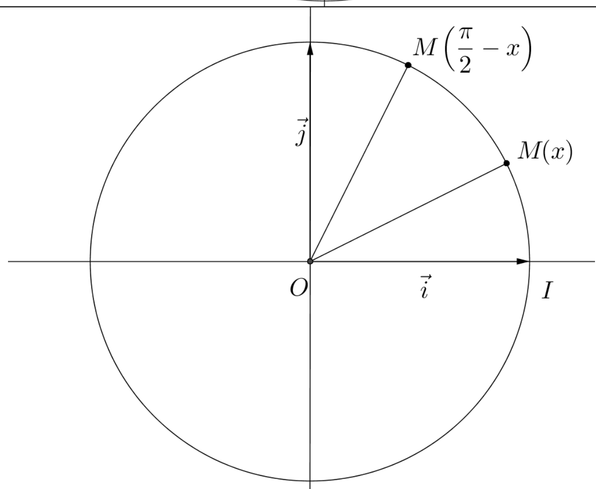
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \dots$

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \dots$



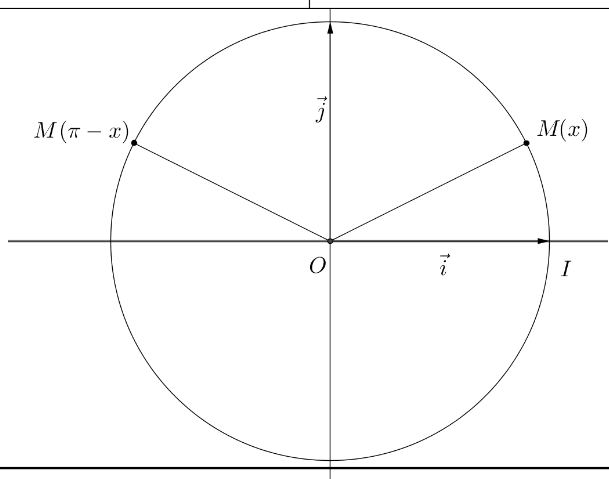
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \dots$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \dots$



$\cos(\pi-x) = \dots$

$\sin(\pi-x) = \dots$

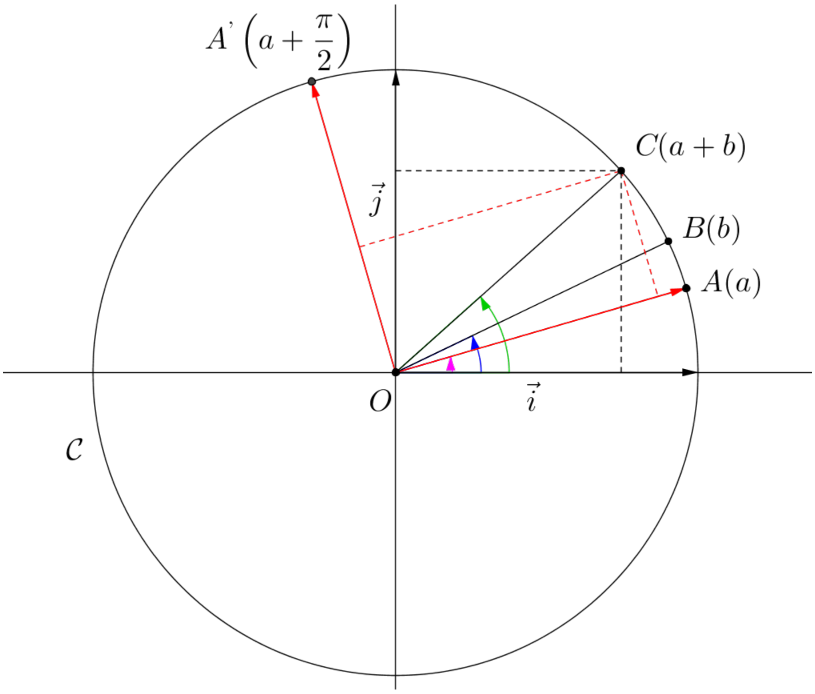


Proposition 6 (Formules d'addition de *cos* et sin).

Pour tous réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$



Proposition 7 (Formule d'addition de tan).

Pour tous réels a et b tels $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ et $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

✎ **Exercice 1**
En utilisant les formules d'addition et les propriétés des fonctions trigonométriques, donner les formules donnant $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, et $\tan(a-b)$

✎ **Exercice 2**
En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$

✎ **Exercice 3**
Déduire des formules d'addition les **formules de duplication** donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

✎ **Exercice 4**
Déduire des formules de duplication les **formules de linéarisation** donnant $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Proposition 8 (Factorisation de $a\cos + b\sin$).

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

φ vérifie $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

✎ **Exercice 5**
Factoriser les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$
3. $f_2 : x \mapsto \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$

En déduire le maximum et la minimum de ces fonctions.

✎ **Exercice 6** *A savoir retrouver rapidement*
En utilisant les formules d'addition, montrer les **formules de linéarisation** suivantes :

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

✎ **Exercice 7** *A savoir faire rapidement*
En utilisant les identités $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$ et les formules d'addition, factoriser $\sin(p) + \sin(q)$, $\sin(p) - \sin(q)$, $\cos(p) + \cos(q)$ et $\cos(p) - \cos(q)$

✎ **Exercice 8** *Formule impliquant la tangente de l'angle moitié*
L'objectif est d'exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Simplifier les expressions suivantes : $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1-t^2}$

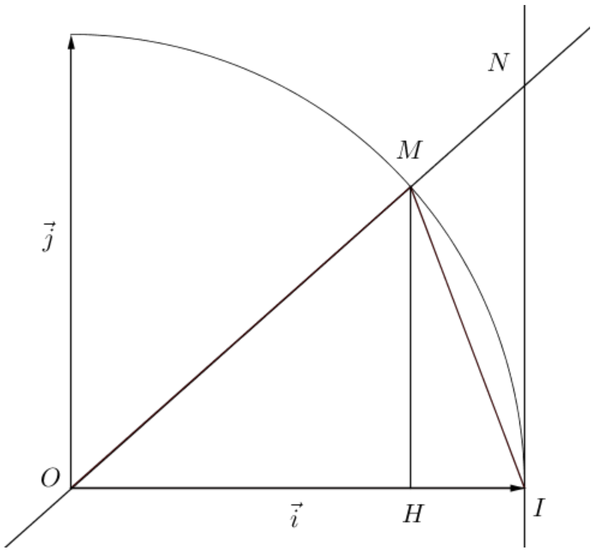
Proposition 9 (Une ingalité fondamentale).

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

Proposition 10 (Inégalité globale du sinus).

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$



Proposition 11 (Limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Proposition 12 (Limite de $\frac{\cos(x)-1}{x}$ en 0)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

Proposition 13 (Dérivée des fonctions trigonométriques)**.**

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\cos'(x)=-\sin(x)$$

et

$$\sin'(x)=\cos(x)$$

La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$,

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

x	0		π
$\cos'(x)=-\sin(x)$	0	$-$	
cos	1	$\searrow$	-1

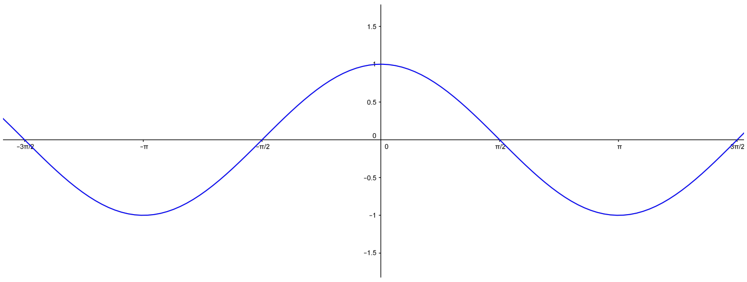


FIGURE 1 – Fonction cosinus

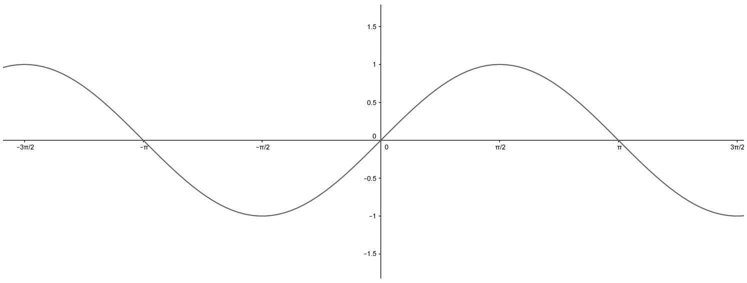


FIGURE 2 – Fonction sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

✎ **Exercice 9**

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$

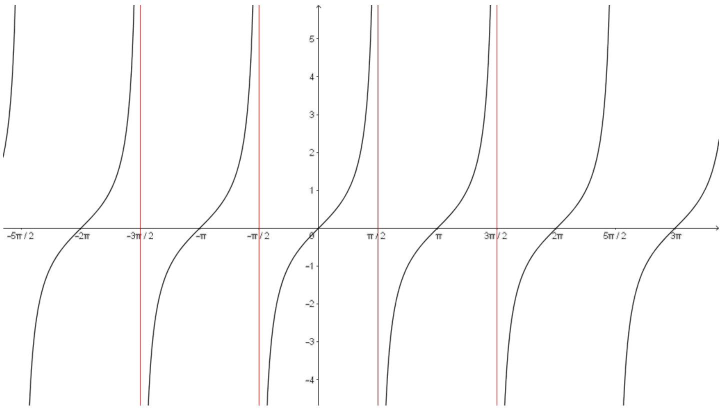


Figure 3 – Fonction tangente

III Equations trigonométriques

Proposition 14 (Cas d'agalité du cos)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (\cos a = \cos b) \Leftrightarrow (a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi])$$

✍ **Exemple 1**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

✎ **Exercice 10**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Proposition 15 (Cas d'égalité du sin)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (\sin a = \sin b) \Leftrightarrow (a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b \quad [2\pi])$$

✍ **Exemple 2**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

✎ **Exercice 11**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 16 (Cas d'agalité de tan)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, (\tan a = \tan b) \Leftrightarrow (a \equiv b \quad [\pi])$$

✍ **Exemple 3**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x) = 1$.

✎ **Exercice 12**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(\frac{x}{3}) = -1$.

IV Formulaire

1. Formules d'addition

$$\boxed{\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

2. Formules de duplication

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}} \qquad \boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

3. Formules de linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

4. Transformation de produit en somme

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin(b)\cos(a) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

5. Transformation de somme en produit (SI CO CO SI CO CO SI SI)

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

6. Formules de l'arc moitié

   Si $t = \left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

7. Transformation de $a\sin x + b\cos x$

$$(a;b) \neq (0;0)$$

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

$$\text{où } \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$