Chapitre ... : Applications, bijections, applications réciproques

I Applications

I.1 Définition

Définition 1.

Une **application** f est définie par :

- Un ensemble de départ E
- Un ensemble d'arrivée F
- La donnée pour tout $x \in E$ d'un **unique** élément de F noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.

On dit que f est une application de E dans F et on note

$$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{iz+1} \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{cases}$$

Définition 2.

Si $y \in F$ et $x \in E$ sont tels que $y = f(x)$ on dit que x est un **antécédent** de y par f.

Exercice 1
Compléter le tableau suivant :

Application	$f(1)$	Antécédent(s) de 1 (?)	$f(-2)$	Antécédent(s) de -2 (?)	Graphe
$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R}+ & \rightarrow & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} \mathbb{R}- & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$					
$f : \begin{cases} [\![-3;3]\!] & \rightarrow & [\![-6;6]\!] \\ x & \mapsto & x \end{cases}$					
$f : \begin{cases} [\![-3;3]\!] & \rightarrow & [\![-6;6]\!] \\ x & \mapsto & 2x \end{cases}$					

Notation.

On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou encore F^E l'**ensemble des applications de** E **dans** F.

Définition 3.

Le **graphe** d'une application f est le sous-ensemble de $E \times F$

$$\{(x; f(x)); x \in E\}$$

I.2 Exemples importants

Définition 4 (Application identité)**.**

Si E est un ensemble on appelle **application identité de** E et on note Id_E

$$Id_E : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

Exemple
Dessiner le graphe de l'application identité de $[0,1]$.

Définition 5 (Fonction indicatrice)**.**

Si E est un ensemble et A une partie de E. On définit une application de E dans l'ensemble $\{0;1\}$, appelée **fonction indicatrice de** A et notée χ_A par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple
Dessiner le graphe de l'application χ_A où $A = [0,1] \cup \{3\}$ en tant qu'application de $\mathbb{R}$ dans $\{0;1\}$.

Définition 6 (Restriction)**.**

Soient E et F sont deux ensembles et f une application de E dans F. Si $A \subset E$, on appelle **restriction de** f **à** A, notée $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} : \begin{cases} A & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Exemple
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Dessiner le graphe de la restriction de f à $[0,1]$.

II Image directe, image réciproque

Définition 7.

Si $A \subset E$, on note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$$

On dit que $f(A)$ est l'**image directe** de l'ensemble A par l'application f.

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ .On a $f([-2;2]) = [0;4]$.

Exercice 2

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$. Déterminer $g([2;5])$.

Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$. Déterminer $h(\mathbb{R})$.

Remarque :

L'ensemble $f(E)$ est un sous ensemble de F mais en général $\boxed{f(E) \neq F}$.

Exercice 3

Soit f une application de E dans F.
Montrer que pour tous A, $A' \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Définition 8.

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et G un sous ensemble de F.
L'**image réciproque** de G par f est l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à G. On la note $f^{-1}(G)$.

$$f^{-1}(G) = \{x \in E / f(x) \in G\}$$

Remarque :

Attention à la notation ! f^{-1} n'est pas une application !

Exemple

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, on a $f^{-1}([0;2]) = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Déterminer $f^{-1}([-2;3])$ et $f^{-1}([-2;-1]$.

Exercice 4

Si $h : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $h^{-1}([0;2])$, $h^{-1}([-2;3])$ et $h^{-1}([-2;-1]$.

Exercice 5

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$. Déterminer $g^{-1}([-8;27])$ et $g^{-1}([0;8])$.

Exercice 6

Montrer que pour tous $B, B' \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

III Injection, surjection

Définition 9 (Injection)**.**

Soit f une application de E dans F. On dit que f est **injective** (ou est une injection de E dans F) si tout élément de F admet **au plus un** antécédent dans E.

Exemple

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

n'est pas injective : le réel 1 possède deux antécédents par f.

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est injective.

Exercice 7
Montrer que

$$f :: \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+3 \end{cases}$$

est injective (on pourra montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet 0 ou 1 antcédent en distinguant deux cas).

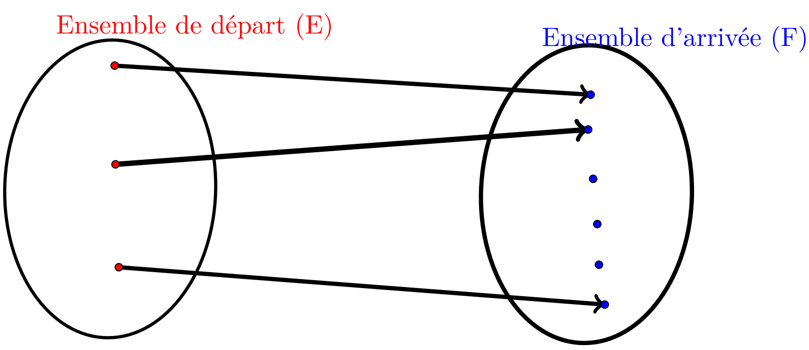
Proposition 1.

Une application f de E dans F est une **injection** si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in E^2, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Exercice 8
Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ est injective.

Exercice 9
Dire si les applications données au tableau de la page 2 sont injectives ou non.



Définition 10.

Soit f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** (ou est une surjection de E dans F) si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E, y = f(x)$$

Autrement dit f est sujective si $f(E) = F$.

Exemple

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

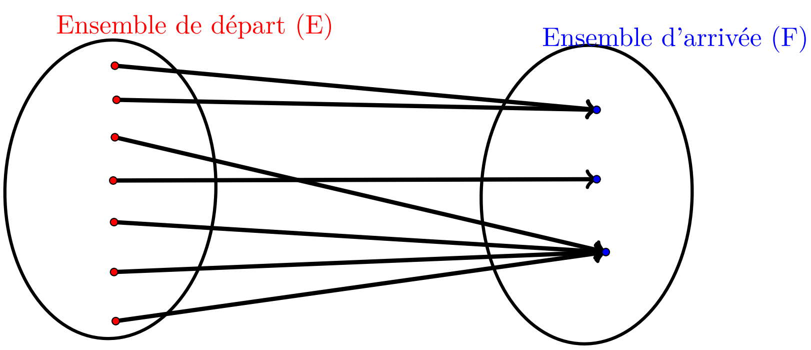
n'est pas surjective : -4 ne possède pas d'antécédent par f.

Exemple

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est surjective.

Exercice 10
Dire si les applications données au tableau de la page 2 sont surjectives ou non.



Exercice 11
Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k \mapsto 2k \end{cases}$
2. $h : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{cases}$
3. $j : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$
4. $l : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y, x) \end{cases}$
5. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x+3y, x-4y) \end{cases}$
6. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x+3y, 4x+6y) \end{cases}$
7. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto 2x+3y \end{cases}$
8. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, 2x+3) \end{cases}$

IV Bijection

IV.1 Définition

Définition 11.

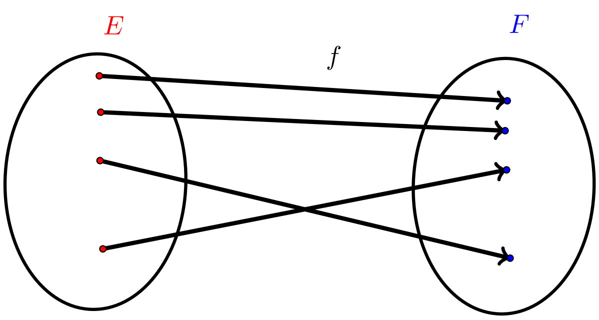
On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F **admet un unique antécédent** dans E :

$$\forall y \in F, (\exists\, !\, x \in E, y = f(x))$$

Exemple

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est bijective : tout élement $y \in \mathbb{R}+$ admet un unique antécedent $x = \sqrt{y}$



Exercice 12
Dire si les applications données au tableau de la page 2 sont bijectives ou non.

IV.2 Application réciproque d'une bijection

Définition 12.

Soit f une application bijective de E dans F.
L'application de F dans E qui à tout élement y de F associe son unique antécédent x de E est appelée **application réciproque** de f et notée f^{-1}. Par conséquent :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Exemple

$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ admet pour application réciproque la fonction $f_4^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

Exercice 13

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (2x + 3y; 4x - y) \end{cases}$

Exercice 14

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto 2x + 3y \end{cases}$

Exercice 15

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x; 2x) \end{cases}$

Exercice 16

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x; x + 3) \end{cases}$

Exercice 17

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \mapsto (2x + 3y; 4x - y) \end{cases}$

Exercice 18

Déterminer les fonctions réciproques des fonctions suivantes après avoir déterminé les ensemble de départ et d'arrivées :

1. $f(x) = \frac{x}{1+x}$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Proposition 2.

Soit f une bijection de E sur F. On a :

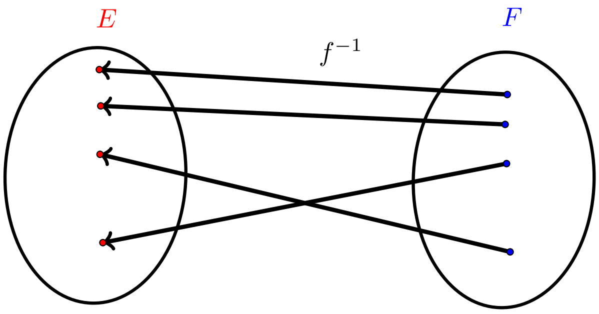
$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$$

Exemple

L'application exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}+^*$.
Son application réciproque est la fonction logarithme népérien, qui est une bijection de $\mathbb{R}+^*$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}+^*), y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}+^*, e^{\ln(x)} = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$



Proposition 3.

Soit $f : E \to F$ une application.
S'il existe $g : F \to E$ telle que

$$\forall x \in E, g(f(x)) = x$$

et

$$\forall y \in F, f(g(y)) = y$$

Alors f est bijective et $g = f^{-1}$

Exercice 19
Démontrer la proposition précédente

V Fonctions continues strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 1 (Théorème de la bijection).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I.
L'image $J = f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur J.
De plus l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J et a même monotonie que f.

Exemple
L'application exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}+^*$. Son application réciproque est la fonction logarithme népérien, qui est une bijection de $\mathbb{R}+^*$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante.

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^n \end{cases}$.
La fonction f_n est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}+$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
L'application f_n est donc une bijection de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}+$ et admet une application réciproque, la fonction racine n^e.

Proposition 4.

Si f est une bijection d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

✏ Démonstration

Théorème 2.

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, dérivable et dont la dérivée est continue et ne s'annule pas sur I. La fonction f^{-1} est dérivable et

$$\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

VI Les fonctions trigonométriques réciproques

Pour définir des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, il faut trouver des intervalles sur lequels les fonctions sont continues et strictement monotones. Des choix ont été fait.

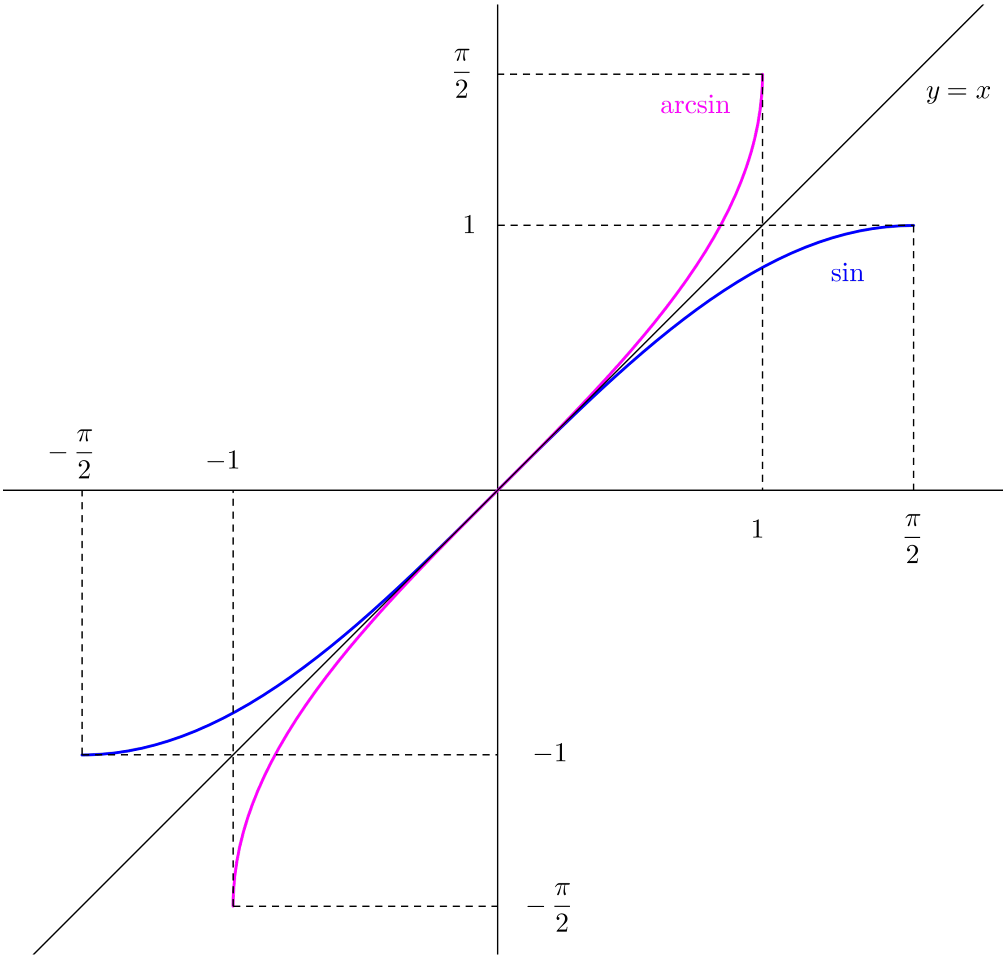
VI.1 La fonction Arcsinus

Définition 13.

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et l'image de cet intervalle est $[-1;1]$. D'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arcsinus**, notée arcsin, définie sur $[-1;1]$ et d'image égale à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, continue et strictement croissante :

$$\forall (x;y) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \times [-1;1], y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$$

Exemple
$\arcsin(0) = \ldots$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots$



Remarque :
Compléter :
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Exercice 20
Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Théorème 3.

La fontion arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✏ Démonstration

Exercice 21
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{1}{5}$
3. $\sin(3x) = -\frac{1}{7}$

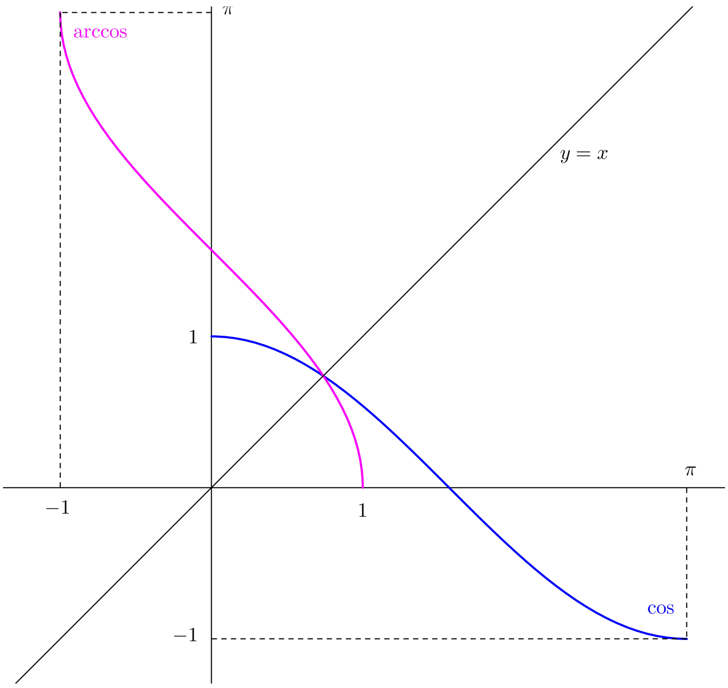
VI.2 La fonction Arccosinus

Définition 14.

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ d'image égale à $[-1,1]$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arccosinus**, notée arccos, définie sur $[-1,1]$ et d'image $[0;\pi]$, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

$$\forall (x;y) \in [0,\pi] \times [-1;1], y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)$$

Exemple
$\arccos(1) = \ldots$, $\arccos(0) = \ldots$, $\arccos(-1) = \ldots$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ldots$



Remarque :
Compléter :
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\cos(\arccos(x)) = x$.
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

Exercice 22
Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Théorème 4.

La fontion arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✏ Démonstration

Exercice 23
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\cos(x) = \frac{1}{5}$
3. $\cos(-4x) = -\frac{1}{3}$

VI.3 La fonction Arctangente

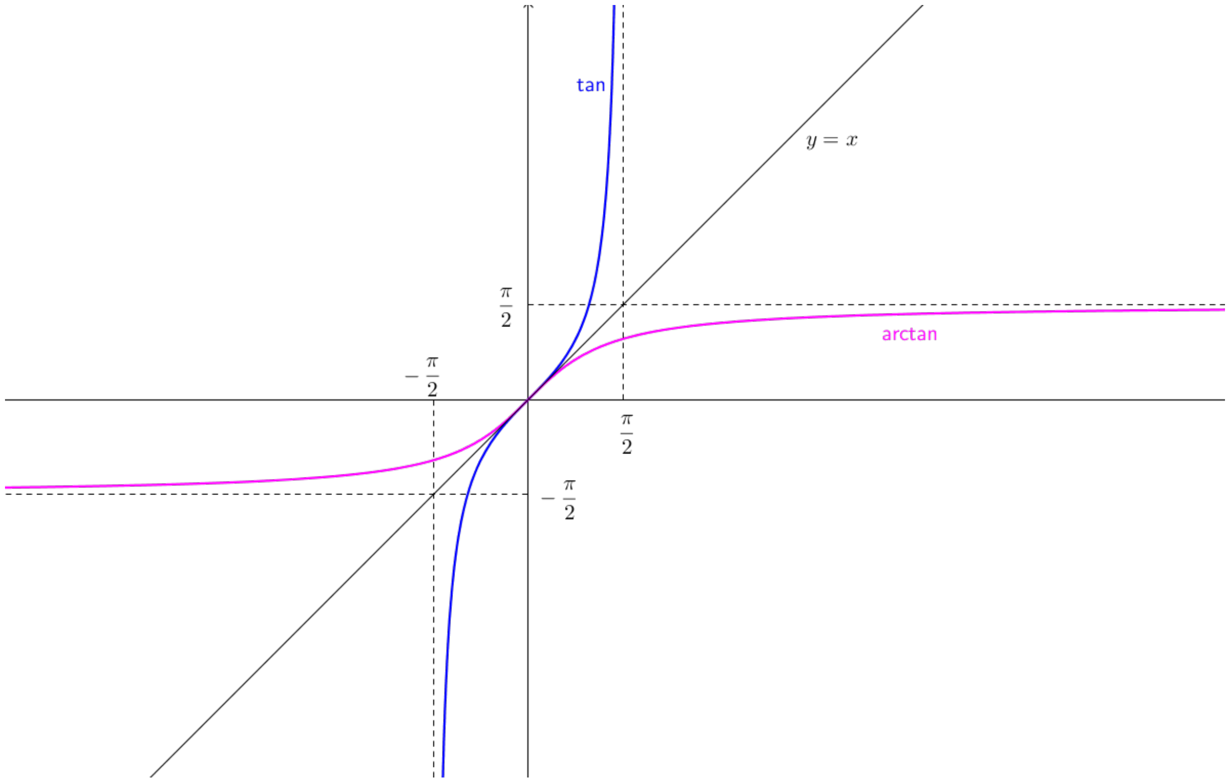
Définition 15.

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et l'image de cet intervalle est $]-\infty;+\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque, appelée **Arctangente**, notée arctan, définie sur $\mathbb{R}$, d'image égale à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x;y) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}, y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y)$$

Remarque :
Compléter :
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
Pour tout $x \in \ldots\ldots$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemple
$\arctan(0) = \ldots$, $\arctan(1) = \ldots$, $\arctan(-\sqrt{3}) = \ldots$



Théorème 5.

La fontion arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

✏ Démonstration

Exercice 24
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\tan(x) = \frac{1}{5}$
2. $\tan(x) = -2$
3. $\tan(2x) = 500$

VI.4 Exercices

Exercice 25
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{x}{|x|}$$

Exercice 26
Calculer :

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{27\pi}{4}\right)\right)$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arccos\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 27

Montrer que :

Pour tout $x \in]0,1]$ $\qquad \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Pour tout $x \neq 0$n

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \text{ signe de } x$$

Exercice 28

Résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes :

1. $\cos(x) \geq \frac{4}{5}$
2. $\sin(x) \leq -\frac{6}{7}$
3. $\cos(x) > -\frac{1}{3}$
4. $\sin(2x) < \frac{3}{7}$
5. $\cos(4x) < \frac{1}{2}$
6. $\tan(x) > 1$
7. $\tan(x) \leq -9$
8. $\arcsin(x) > \frac{\pi}{3}$
9. $12\sin^2 x - \sin(x) - 1 \leq 0$
10. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$
11. $\arcsin(\tan(x)) = x$
12. $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$
13. $\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$