Chapitre ... : Applications linéaires

I Définition

Définition 1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. On dit que f est **linéaire** si

1. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Exemple
Si $a \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ est linéaire.
En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f(x)$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$ est linéaire.
En effet, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f(X) + f(Y)$ et $f(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda f(X)$.

Remarque :
Si f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$.

Notation.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 1.

Une application $f : E \to F$ est linéaire **si et seulement si**

$$\forall (u,v) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Exemple
Si $a \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ est linéaire.
En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda ax + ay = \lambda f(x) + f(y)$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$ est linéaire.
En effet, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda f(X) + f(Y)$

Exercice 1
Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ est une application linéaire.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a donc $\lambda u+v\begin{pmatrix} \lambda x+x' \\ \lambda y+y' \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned}
f(\lambda u+v) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x+x' \\ \lambda y+y' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x+x'+(\lambda y+y') \\ \lambda x+x'-(\lambda y+y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x+y)+(x'+y') \\ \lambda(x-y)+(x'-y') \end{pmatrix} \\
&= \lambda\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(u)+f(v)
\end{aligned}$$

Exemple

L'application $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est linéaire.

En effet pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'=\lambda f(P)+f(Q)$

Exemple

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f(2) \end{cases}$ est linéaire.

En effet pour tous $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)=(\lambda f+g)(2)=\lambda f(2)+g(2)=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$

Exemple

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases}$ est linéaire

En effet pour tous $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+g)=\int_a^b(\lambda f+g)=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$

Exemple

Pour $p, n \in \mathbb{N}$, $p<q$, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \sum_{k=p}^q u_k \end{cases}$ est linéaire.

Soient u et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda u+v) &= \sum_{k=p}^q(\lambda u+v)_k \\
&= \sum_{k=p}^q \lambda u_k+v_k \\
&= \lambda\sum_{k=p}^q u_k+\sum_{k=p}^q v_k \\
&= \lambda\varphi(u)+\varphi(v)
\end{aligned}$$

Exemple

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'application $\begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto af''+bf'+cf \end{cases}$ est linéaire.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f+g) &= a(\lambda f+g)''+b(\lambda f+g)'+c(\lambda f+g) \\
&= a(\lambda f''+g'')+b(\lambda f'+g')+c(\lambda f+g) \\
&= \lambda(af''+bf'+cf)+ag''+bg'+cg \\
&= \lambda\varphi(f)+\varphi(g)
\end{aligned}$$

Proposition 2.

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.

1. Si H est un sous-espace vectoriel de E alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si G est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Exemple

On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Montrer que f est linéaire puis déterminer $f(F)$ où $F = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $f^{-1}(G)$ où $G = \{0\}$.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et on a donc $(\lambda u + v) \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ -(\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$f(F) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} u \in f^{-1}(G) &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

Définition 2.

On appelle **endomorphisme de** E une application linéaire de E dans E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple

L'application $\text{id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$ est un endomorphsime.

Exemple
Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On note $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$. Pour $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$.
On a

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= xf\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + yf\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

car f est linéaire .
donc finalement

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

II Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3.

Soient E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Proposition 4.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 5 (Règles de calcul).

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

Si $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Si$f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda(g \circ f)$$

Proposition 6.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration :

Définition 3.

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**. Un endomorphisme bijectif est appelé **automorphsime**.

III Endomorphismes

Proposition 7 (Remarque)**.**

$\mathcal{L}(E)$ est muni d'une loi de composition interne $\circ$:

1. qui n'est pas commutative
2. qui est associative
3. qui admet l'identité pour élément neutre $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$

Définition 4.

L'ensemble des endomorphismes de E bijectifs est appelé **groupe linéaire** et noté $GL(E)$.

Proposition 8.

1. Si $f \in \mathcal{GL}(E)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si f et $g \in \mathcal{GL}(E)$ alors $f \circ g \in \mathcal{GL}(E)$ et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Définition 5.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on peut définir $f^n = f \circ f \cdots \circ f$. On pose par convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Exemple
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $(f + \mathrm{id}_E)^2$ et $(f + g)^2$

IV Image et noyau

Définition 6 (Image)**.**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **image de** f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de f.

Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ en montrant que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ possède un antécédent par f.

Soit $U \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{aligned} f(u) = U \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y = X \\ 3x-y = Y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{-2}{5}Y + \frac{3}{5}X \\ x = \frac{1}{5}X + \frac{1}{5}Y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc tout élément de $\mathbb{R}^2$ possède un antécédent par f. On a donc bien $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de g.

En raisonnant de même on trouve une équation de compatibilité $Y = 2X$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Définition 7 (Noyau)**.**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau de** f l'ensemble

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de f.

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(u) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y = 0 \\ 3x-y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

.

On a donc $\ker(f) = \{0\}$.

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de g.

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(u)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}y \\ y=y \end{cases} \end{aligned}$$

.

On a donc $\ker(f) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Exemple

Déterminer le noyau de $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ puis le noyau de $g : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto XP$

Proposition 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration :

Exercice 2

L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ est-elle injective ? surjective ?

Méthode 1.

Pour montrer qu'une application linéaire f est injective on montre que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Exercice 3

Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ est injective.

Proposition 10.

L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$: si $E = \text{vect}(e_1, \dots e_n)$ alors $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots f(e_n))$.

Démonstration :

Proposition 11.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective alors l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Démonstration :

Proposition 12.

Si f est injective alors l'image par f d'une famille libre est une famille libre.

Démonstration :

Proposition 13 (Conséquence)**.**

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors l'image par f d'une base de E est une base de F.

Démonstration :

V Isomorphisme

Définition 8 (Rappel)**.**

On appelle **isomorphisme** de E sur F une application **linéaire bijective** de E dans F.

Théorème 1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre

1. f est un isomorphisme.
2. f transforme toute base de E en un base de F.
3. f transforme une base de E en un base de F.

Démonstration :

Proposition 14.

Si deux espaces de dimension finie E et F. Si E et F sont isomorphes alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 15.

Soient E et F deux espaces **de même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors f est bijective si et seulement si f est injective si et seulement si f est surjective.

Démonstration :

Exemple
Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+y)$ est un isomorphisme.

Remarque :
En particulier si E est de dimension finie un endomorphisme de E est un automorphisme et seulement si il est injectif si et seulement si il est surjectif.

Exemple
Ce n'est pas le cas en dimension infinie : l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjectif mais non injectif.

VI Modes de génération

Proposition 16.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Proposition 17.

Si E est de dim p et $\mathcal{B}$ une base de E et F de dimension n et $(v_1, \dots v_p)$ une famille de F il existe une unique $f : E \to F$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Exemple
Il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Exprimer $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et déterminer noyau et image de f.

On commence par décomposer $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ selon notre base :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f\left((x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= (x-y)f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zf\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y \\ x-y+z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\ker(f) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Théorème 2.

Soient E et F deux espaces vectoriel de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 18.

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Exemple
Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors il existe une unique application linéaire $E \to E$ telle que $f(u) = u$ pour tout $u \in E_1$ et $f(u) = -u$ pour tout $u \in E_2$.

VII Rang

Définition 9.

On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

On dit que f est **de rang fini** si son rang est fini.

Proposition 19.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité ssi f surjective
2. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi f injective

Proposition 20.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathcal{L}(F,G)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$ de rangs finis.

$$\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Théorème 3 (Théorème du rang)**.**

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u)$$

Démonstration :

Exemple

L'application définie dans l'exemple précédent par $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Vérifie bien $3 = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 4

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_2, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{cases}$. Déterminer le rang et la dimension du noyau de f.

Pour trouver le noyau de f on résout le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ et on trouve deux variables pricipales x_1 et x_2 que l'on exprime en fonction des paramètres x_3 et x_4

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\ker(f) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

On a donc $\dim(\ker(f)) = 2$ et donc par le théorème du rang :

$$4 = 2 + \mathrm{rg}(f)$$

et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'' \end{cases}$. Déterminer le rang et la dimension du noyau de f.

Remarque :
On retrouve que, si $\dim(E) = \dim(F)$, f bijective ssi f injective ssi f surjective.

VIII Application linéaire en dimension finie : représentation matricielle

Proposition 21 (Rappel)**.**

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

VIII.1 Définition

Définition 10.

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p)$ est une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots f_n)$ est une base de F alors la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $u(e_1), \dots u(e_p)$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \\ f_n \end{array}$$

Remarque :
Si f est un endomorphisme et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ on note simplement $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 22.

Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ Soient $x \in E$ et $y \in F$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots f_n)$ une base de F. Si on note X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et Y la matrice des coordonnées de y dans la base $\mathcal{C}$ et $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ alors on a

$$y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$$

Démonstration :

Proposition 23 (Conséquence : trouver le noyau d'une application linéaire)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $x \in E$. Si on note X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ on a

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow AX = 0$$

Proposition 24 (Conséquence : trouver l'image d'une application linéaire)**.**

Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $y \in F$. Si on note Y la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$ et $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ on a

$$y \in \mathrm{Im}(u) \Leftrightarrow Y \in \mathrm{vect}(C_1, C_2, \dots C_n)$$

Exercice 5

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 4y-2x \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

On a comme base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ au départ et $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ à l'arrivée.

On met dans la première colonne les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image du premier vecteur de la base $\mathcal{B}$, :

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et dans la deuxième colonne, on met les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image du deuxième vecteur de la base $\mathcal{B}$, :

$$u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

1. Déterminer la matrice de $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soient maintenant $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}' = (w_1, w_2)$ où $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement .
A faire
Déterminer $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.
On calcul $u(v_1)$ (en utilisant l'expression algébrique ou bien les coordonnées) :

$$u(v_1) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On dispose des coordonnées de $u(v_1)$ dans la base C. Or on veut déterminer $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ donc il nous faut les coordonnées de $u(v_1)$ dans la base C'. En notant (λ_1, λ_2) ces coordonnées, on résout le système :

$$u(v_1) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 3$ La première colonne de la matrice recherchée est donc $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On va faire de même avec $u(v_2)$ et $u(v_3)$.

$$u(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_1 = -4$ La deuxième colonne de la matrice recherchée est donc $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$u(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ La troisième colonne de la matrice recherchée est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice est donc

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \mapsto XP'$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Trouver la matrice de f dans les base canoniques
3. Soit $\mathcal{B} = (2, 1 + X, 3X_5^2)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$
5. Soit $\mathcal{C} = (3, 5 - X, 2X^2 + X + 1)$. $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$

Exercice 8

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Proposition 25.

Soient E et F deux espaces vectoriel de dimensions finies p et n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.

L'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Proposition 26 (Conséquence).

$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$

Exemple
$\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$

Définition 11.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est $X \mapsto AX$.

Exemple
Endomorphisme canoniquement associé à A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

VIII.2 Composition

Proposition 27.

Soit $g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f \in \mathcal{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Si on note $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de E, F et G respectivement et que l'on note $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ et $B = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}(g)$ alors

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2}(f \circ g) = AB$$

Exercice 9
Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 4y \end{pmatrix}$ et $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{M}\mathrm{at}_{can}(f \circ g)$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{can}(g \circ f)$

VIII.3 Changement de base

Définition 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim n et $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots v_n)$ une nouvelle base de E. On définit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ comme étant $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_0}(v_1, \dots v_n)$ c'est-à-dire

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} = \mathcal{M}\mathrm{at}_{B_0}(v_1, \dots v_n) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_n \end{array}$$

Remarque :
On a $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_0}(v_1,\dots v_n) = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}(\text{id}_E)$

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
On considère la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ Déterminer $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}$.
$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

Exercice 11

Plus facile mais encore plus important : Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
On considère la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ Déterminer $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}$.

Proposition 28.

Soit $x \in E$. Si on note X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_0$ et X' la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_1$ alors on a $X = PX'$.

Exercice 12

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
On considère la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$. Soit x le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_0$.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
On considère la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ Déterminer $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$. Que remarquez-vous ?

Proposition 29.

Si $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ deux bases d'un même espace vectoriel E alors on a

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0} = I_n$$

On a donc

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$$

Proposition 30.

Soient $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ deux bases de E et $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
Enfin on pose $A = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0}(u)$ et $B = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(u)$.
On a alors

$$B = Q^{-1}AP$$

autrement dit

$$A = QBP^{-1}$$

Exemple

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ telle que $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-z\\x+y+z\end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$)
2. Montrer que $\mathcal{B}_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{C}_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les matrices P et Q de la proposition précédente.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{C}_1$

Proposition 31.

Lorsque $E=F$.
Soit A la matrice de f dans la base canonique. Soit P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$. La matrice B de f dans cette nouvelle base $\mathcal{B}$ est

$$B=P^{-1}AP$$

On a la relation

$$A=PBP^{-1}$$

Exercice 14

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{B}_1=(v_1,v_2)$ où $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Justifier que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(f)$.
Déterminons la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$.

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

on trouve

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(f)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&6\\1&-1\end{pmatrix}$$

Exercice 15

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$
Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On considère la base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(f)$.

$$\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1}AP$$

or

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

on a donc

$$\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \frac{-17}{6} & \frac{-37}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

VIII.4 Matrices semblables

Définition 13.

Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Remarque :

Soit $\mathcal{B}_0$ une base de E et P la matrice des coordonnées d'une famille $(v_1, \ldots v_n)$. La famille $(v_1, \ldots v_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice P est inversible.

Proposition 32.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme linéaire dans deux bases différentes.

VIII.5 Rang

Définition 14.

On appelle rang de la matrice A le rang de ces vecteurs colonnes.

Proposition 33.

Le rang des vecteurs colonnes de A est égal au rang des vecteurs lignes.

Proposition 34.

Le rang de A est égal au rang de l'application $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée.

Proposition 35.

Le rang de A est égal au rang du système $AX = 0$ (c'est-à-dire au nombres de pivots de la matrice)

Méthode 2.

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Proposition 36.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\text{rg}(M) = n$.

Proposition 37.

Soient E et F deux espaces vectoriel de même dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $A = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

1. f est un isomorphisme ssi la matrice A est inversible.
2. Si f est un isomorphisme, alors
$$\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que f est un isomorphsime et déterminer f^{-1}.

La matrice A est de rang 2 donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ donc $f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}$

Proposition 38.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme et A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors

1. f est un isomorphisme ssi la matrice A est inversible.
2. Si f est un isomorphisme, alors la matrice de l'application linéaire f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A^{-1}.

Proposition 39.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}(PA) = \text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$.

Proposition 40 (Conséquence)**.**

Deux matrices semblables ont même rang.

Proposition 41.

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base quelconque.
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple quelconque de bases.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'application canoniquement associée à A. Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la matrice représentative de f dans la base (v_1, v_2)

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.

   A est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque toutes deux représentent l'endomorphisme f dans des base différentes.

4. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. $B^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$ donc

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} P^{-1}$$