Convexité

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque :
· Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On a :

$$[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

· Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. Equation de la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

I Définition

Définition 1 (Fonction convexe)**.**

La fonction f est convexe sur I si

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

✍ **Exemple 1**
L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

✍ **Exemple 2**
Montrer qu'une fonction affine est convexe sur $\mathbb{R}$

✎ **Exercice 1**
Montrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$

Remarque :
· Les fonctions convexes (resp. concaves) sont caractérisées par le fait que la courbe est en-dessous (resp. au-dessus) de chacune de ses cordes.
· Si f admet un minimum local en a et si f est convexe alors f admet en fait un minimum global en a.

Définition 2 (Fonction concave)**.**

La fonction f est concave sur I si

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

✎ **Exercice 2**
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Inégalité de Jensen)**.**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Remarque :
Il est courant d'appliquer ce théorème avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

II Convexité et dérivablité

Pour $a \in I$, notons $\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$

Proposition 1 (Caractérisation des fonctions convexes)**.**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On a : f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est croissante sur $I \backslash \{a\}$.

Proposition 2 (Corollaire : Inégalité des trois pentes)**.**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Pour tous $a, b, c \in I$ avec $a < c < b$, on a

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Proposition 3 (Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I

Proposition 4 (Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses tangente)**.**

Le graphe d'une fonction convexe se situe au-dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

✍ **Exemple 3**
Ecrire cette inégalité pour exp en 0

✎ **Exercice 3**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Proposition 5 (Caractérisation des fonctions concaves parmi les fonctions dérivables)**.**

Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I

Proposition 6 (Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses tangente)**.**

Le graphe d'une fonction concave se situe au-dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a).$$

✎ **Exercice 4**
Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $x \geq \ln(x+1)$.

Proposition 7 (Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions deux fois dérivables)**.**

Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I

Proposition 8 (Caractérisation des fonctions concaves parmi les fonctions deux fois dérivables).

Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est convexe).

— Si f est dérivable une fois, on calcule f' et on étudie sa monotonie.
— Si f est au moins deux fois dérivable, on calcule f'' et on étudie son signe.
— Sinon on prend $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ et on montre l'inégalité de la définition de la convexité.

✎ **Exercice 5**
Etudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$
3. $f : x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, \pi]$