Chapitre 13 : Dérivabilité

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, a désigne un élément de I et f une fonction définie sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$.

I Nombre dérivée et fonction dérivée

Définition 1 (Dérivabilité en un point).

Une fonction f définie en a est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une **limite finie** lorsque x tend vers a.
Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$.

Remarque : *Taux d'accroissement*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

✍ **Exemple 1**
Soit $a\in\mathbb{R}$.
Montrer que $x\mapsto 3$ est dérivable en a.
Montrer que $x\mapsto x$ est dérivable en a.
Montrer que $x\mapsto \frac{3}{2}x-4$ est dérivable en a.
Montrer que $x\mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $a>0$ mais n'est pas dérivable en 0.
Montrer que $x\mapsto x^2$ est dérivable en a.
Montrer que $x\mapsto x^3$ est dérivable en a.
Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Montrer que $x\mapsto x^n$ est dérivable en a (utiliser le binôme de Newton)

✎ **Exercice 1**
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Proposition 1 (La dérivabilité implique la continuité)**.**

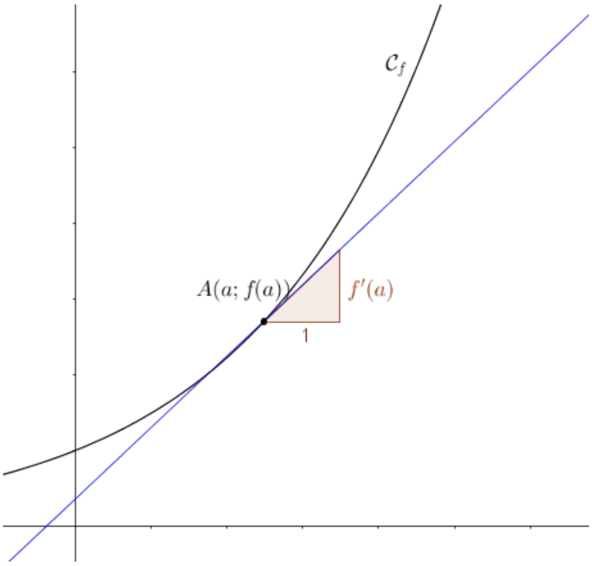
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque :
La réciproque est fausse.

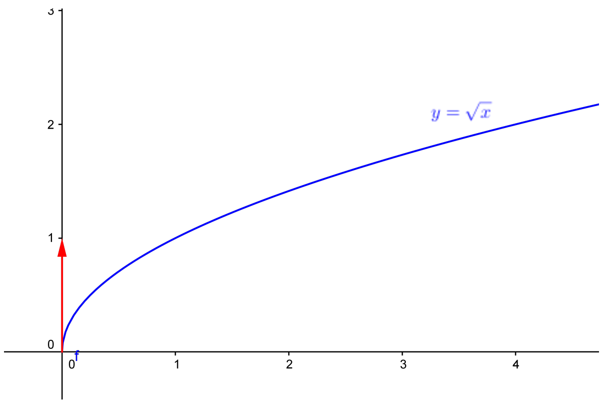
Proposition 2 (Tangente en un point)**.**

Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet une **tangente** au point d'abscisse a. C'est la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Remarque :
Si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $-\infty$ alors la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.



✍ **Exemple 2**
La courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Remarque :
Il existe des fonctions dont la courbe représentative n'admettent pas de tangente en un point.
Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Définition 2 (Dérivabilité à droite/à gauche)**.**

On dit que f est **dérivable à droite en** a (resp. à gauche en a) si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a (resp à gauche en x_0). Cette limite se note $f'_d(a)$ (resp $f'_g(a)$)

✍ **Exemple 3**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. La fonction f est dérivable à droite et à gauche en 0.

Proposition 3 (CNS de dérivabilité)**.**

Si f est définie sur un voisinage de a de la forme $]a-\delta; a+\delta[$ alors

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a}$$
si et seulement si
$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \textbf{ et } f'_d(a) = f'_g(a)}.$$

✍ **Exemple 4**
La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

✎ **Exercice 2**
Les fonctions suivantes sont elles dérivables en a :

1. $f_1 : x \mapsto \begin{cases} x^3 + 5 \text{ si } x \leq 1 \\ -x^2 + 8 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
2.
3. $f_2 : x \mapsto \begin{cases} {}^3 \text{ si } x < 0 \\ -3x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Méthode 1 (Comportements possibles du taux d'accroissement)**.**

1. Le taux d'accroissement admet une limite finie en a : f est dérivable en a
2. Le taux d'accroissement admet une limite infinie en a : f n'est pas dérivable en a mais sa courbe admet une tangente verticale en a
3. Le taux d'accroissement admet une limite finie à droite et à gauche mais celles-ci sont différentes : la fonction est dérivable à droite (avec demi tangente à droite) et dérivable à gauche (avec demi tangente à gauche)
4. Le taux d'accroissement n'admet pas du tout de limite en a : f n'est pas dérivable en a

II Dérivabilité sur un intervalle

Définition 3 (Dérivabilité sur un intervalle)**.**

Une fonction f est dite **dérivable sur l'intervalle** I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f' la fonction de I dans $\mathbb{R}$, qui à $x \in I$ associe $f'(x)$.

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

Proposition 4 (Opérations sur les fonctions dérivables)**.**

Les **somme, combinaison linéaires, et le produit de deux fonctions dérivables sur** I est dérivables sur I.
Si f et g sont dérivables sur I **et** g **ne s'annule pas sur** I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I.
On a alors

1. Linéarité de la dérivation : $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
2. Dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$
3. Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Remarque :
Si f est dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Proposition 5 (Dérivabilité de la composée)**.**

On suppose f définie sur un intervalle I et g définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

✎ **Exercice 3**
Rechercher le plus grand intervalle sur lequel $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ est dérivable et déterminer f_1' sur cet intervalle.
Même question pour les fonctions $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Proposition 6 (Dérivabilité de la réciproque)**.**

Soit f une application continue et bijective de I sur J. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

III Propriétés des fonctions dérivables

Définition 4 (Extremum local)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un **maximum local en** a si pour tout x dans un **voisinage** de a, on a $f(x) \leq f(a)$.
On dit que f admet un **minimum local en** a si pour tout x dans un **voisinage** de a, on a $f(x) \geq f(a)$.
On dit que f admet un **extremum local en** a si f y admet un maximum local ou un minimum local.

Théorème 1 (Extremum local et dérivée)**.**

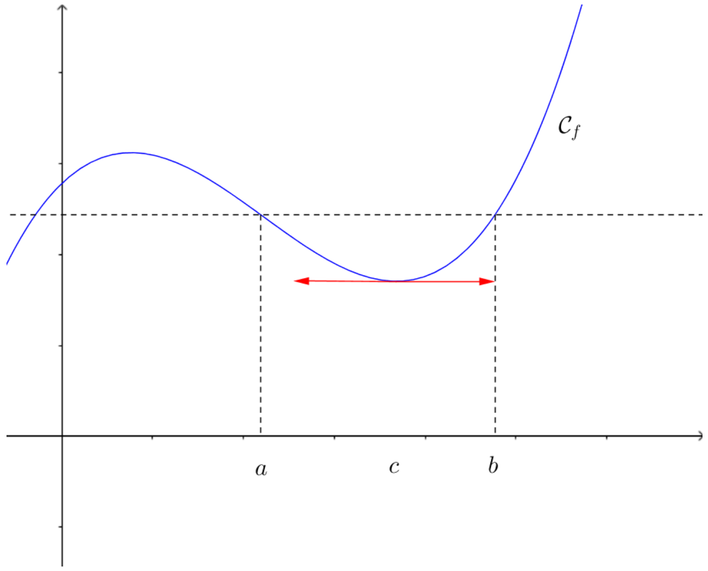
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un point **intérieur** à I. Si f est dérivable en x_0 et présente en x_0 un extremum local alors $f'(x_0) = 0$

Remarque :
Le théorème ne s'applique pas en une borne de l'intervalle. Le fait d'être un point intérieur est essentiel.
Ex : $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$.
Le fait d'être dérivable est essentiel. Ex : $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.
Ex : La dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais la fonction n'y admet pas d'extremum local.

Théorème 2 (Théorème de Rolle)**.**

Soit f une fonction **continue sur** $[a,b]$, **dérivable sur** $]a,b[$ et vérifiant $f(a)=f(b)$. Alors il exsite $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.



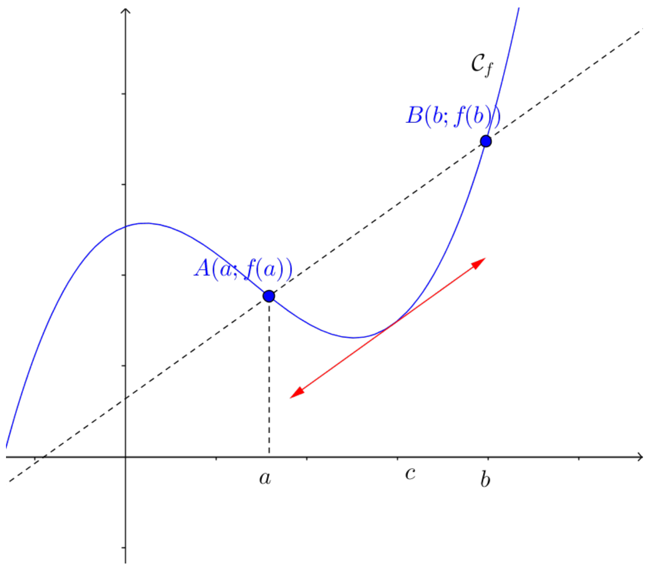
Remarque :
Il n'y a pas unicité de c.

Remarque :
La dérivabilité sur tout l'intervalle ouvert est essentielle.
Ex : $x\mapsto |x|$.
La continuité sur tout l'intervalle fermé est essentielle.
Ex : $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $\forall x\neq 0,\ f(x)=1-x$.

Théorème 3 (Egalité des accroissement finis)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors

$$\exists c\in]a,b[\quad \text{tel que } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



Remarque : *Interprétation graphique*
Le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde reliant les points d'abscisses a et b. L'égalité des accroissements finis nous dit qu'il existe un point c tel que la tangente au point d'abscisse c a même pente que cette corde.

Démonstration
Considérer la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ et montrer qu'elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis).

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$ tels que

1. f est continue sur $[a,b]$
2. f est dérivable sur $]a,b[$
3. Pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq k$

Alors pour tout $(x,x') \in [a,b]^2$,
$$|f(x') - f(x)| \leq k\,|x' - x|$$
On dit alors que f est k-Lipschtzienne sur $[a,b]$

✍ **Exemple 5**
Montrer que sin est 1-Lispschitzienne sur $\mathbb{R}$

✍ **Exemple 6**
Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est Lispschitzienne sur $[1;+\infty[$

✎ **Exercice 4**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leq |x|$

Méthode 2 (Application aux suites récurrentes.).

Soit u une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue et dérivable sur un certain intervalle I stable par f.

1. On recherche un point fixe l de f sur I.
2. On majore $|f'|$ sur I par une constante positive $k < 1$
3. On établit par récurrence sur n que $|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l|$
4. On conclue que u converge vers l.

✎ **Exercice 5**
Montrer que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Théorème 5 (Dérivée et sens de variation).

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I, alors

1. f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$ on a $f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$ on a $f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$ on a $f'(x) = 0$

Remarque :
La condition **intervalle** est cruciale : la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ n'est pas constante sur $\mathbb{R}$

Proposition 7 (Dérivée et sens de variation strict).

Soit f une fonction dérivable sur I, alors

1. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I \setminus D$ où D est un ensemble fini de points alors f est strictement croissante sur I.
2. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I \setminus D$ où D est un ensemble fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème 6 (Théorème de la limite de la dérivée).

Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que

1. f est continue sur I
2. f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
3. f' admet une limite finie l lorsque $x \to a$

Alors f est dérivable en a, $f'(a) = l$ et f' est continue en a

✍ **Exemple 7**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ pour $x \in]-\pi;\pi[\backslash 0$ et $f(0) = 0$. Etudier la dérivabilité de f en 0 (deux méthodes sont possibles).

✎ **Exercice 6**
Soit f : $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours f le prolongement.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et déterminer l'expression de a dérivée.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$

Remarque :
La réciproque est fausse. La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 mais f' n'admet pas de limite en 0.

IV Fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Définition 5 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

Remarque :
Il existe des fonctions dérivables mais non $\mathcal{C}^1$.
Exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables et dérivable en 0 (voir ci-dessus) donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
Mais la dérivée de la restriction de f à $]0;+\infty[$ n'admet pas de limite en 0 donc f' n'est pas continue en 0.

Définition 6 (Dérivée d'ordre supérieur)**.**

Si $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Si on suppose f dérivable $(n-1)$ fois en x_0 et si $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$ est dérivable en x_0, on dit que f est n fois dérivable en x_0 et on note $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ la dérivée n^e de f en x_0.
Si f est n fois dérivable en tout point de I on dit que f est n fois dérivable sur I. On appelle dérivée n^e de f et on note $f^{(n)}$ l'application $x \in I \mapsto f^{(n)}(x)$.
Par convention $f^{(0)} = f$.

Définition 7 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Notation.

On note $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Proposition 8 (Régularité des fonctions usuelles)**.**

Les fonctions polynômiales sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, les fonctions usuelles (fraction rationnelles, exp, ln, cos,sin,tan, arcsin, arccos, arctan) sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs intervalles de dérivabilité.

✍ **Exemple 8**
Soit $f : x \in]1;+\infty[\mapsto \frac{1}{1-x^2}$. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer $f^{(n)}$ pour tout n.

✍ **Exemple 9**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$

✎ **Exercice 7**
Montrer que la fonction arctan est $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

Proposition 9 (Linéarité de la dérivation)**.**

Si f et $g \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$, $\lambda f \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ et pour tout $k \leq p$:

$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$$

$$(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$

$$(\lambda f+g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}$$

Proposition 10 (Régularité du quotient)**.**

Si $f\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ et ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$

Proposition 11 (Régularité de la composée)**.**

Si $f\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^p(J,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$

Théorème 7 (Formule de Leibniz).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(f,g) \in (\mathcal{C}^n(I))^2$ Alors fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

✎ **Exercice 8**
Soit $h : x \mapsto x^2 e^{3x}$. Déterminer $h^{(n)}$ pour tout n.

V Exercices

✎ **Exercice 9**
Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0^+. On appelle toujours f le prolongement.
3. Montrer que f est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}+$.
4. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété suivante est vraie pour tout n : $\mathcal{P}(n)$: « $f^{(n)}$ existe et est continue en 0 »
6. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}+$

✎ **Exercice 10**
Faire une étude similaire à l'exercice précédent pour $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

✎ **Exercice 11**
Majorer l'erreur commise en faisant l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100. On pourra utiliser l'inégalité des accroissement finis à la fonction racine carrée sur un intervalle bien choisi pour majorer $|\sqrt{10001} - \sqrt{10000}|$.

✎ **Exercice 12**
Soit f une fonction de classe C^2 de $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $\gamma \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$$

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction

$$h : \mapsto f(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$$

✎ **Exercice 13**
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et telle que

$$f(a) = f'(a), \quad f(b) = f'(b)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ telle que $f''(c) = f(c)$.

✎ **Exercice 14**
Démontrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.
En déduire un encadrement de la suite S définie par $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Montrer que S converge.