Chapitre ... : Dimension

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Familles finies de vecteurs

I.1 Famille libre et liée

Définition 1 (Famille liée)**.**

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$ d'éléments de E est **liée** lorsqu'**il existe** une famille de réels λ_1, λ_2, $\dots \lambda_p$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}_E$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille liée.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soit $f : x \mapsto \cos^2(x)$, $g : x \mapsto \sin^2(x)$ et $h : x \mapsto 1$. La famille (f, g, h) est une famille liée.

Proposition 1.

1. Toute famille **contenant une famille liée** est liée.
2. Toute famille **contenant le vecteur nul** est liée.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$:

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est une famille liée.

$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ est une famille liée.

Définition 2 (Famille libre)**.**

On dit que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$ est une famille **libre** lorsqu'elle n'est pas liée.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre.

Proposition 2.

Toutes famille **extraite d'une famille libre** est une famille libre.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre.

Proposition 3.

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p)$ est une **famille libre** si et seulement si, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\left(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}\right) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0)$$

Exemple
On se place dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soient $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto e^x$. La famille (f_1, f_2) est une famille libre.
La famille $(\cos, \sin)$ est libre.
La famille $(1, \cos, \sin)$ est libre.

Exercice 1

On considère la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante (u, v, w) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Est-elle libre ou liée ? Si elle est liée trouver une relation entre les vecteurs.

Exercice 2

On considère la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante (u, v, w) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-elle libre ou liée ? Si elle est liée trouver une relation entre les vecteurs.

Définition 3.

Soit $(P_1, \dots P_n)$ une famille de $\mathbb{K}[X]$. On dit que cette famille est **échelonnée en degré** si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Exemple
$(X, X^2 + 3X, \dots X^3 + 5X^2, X^6)$

Proposition 4.

Soit $(P_1, \dots P_n)$ une famille de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré et ne contenant pas le polynôme nul. Alors c'est une famille libre.

Exemple
La famille $(X, X^2 + 3X, \dots X^3 + 5X^2, X^6)$ est libre.

Exercice 3
Montrer la proposition suivante :
Si $(e_1, \dots, e_k \dots e_n)$ est une famille libre alors les espaces $\mathrm{vect}(e_1, \dots e_k)$ et $\mathrm{vect}(e_{k+1}, \dots e_n)$ sont en somme directe.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$; on donne dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre ou liée ?

Exercice 5
E est un espace vectoriel et la famille $\{V_1; V_2; V_3\}$ est libre.
La famille $\{V_1 + V_2 + V_3; V_1 - V_2 + V_3; V_1 + V_2 - V_3\}$ est-elle libre ou liée ?

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions $f_1, f_2, ...f_n$ définies par :
$\forall k \in \{1, \dots n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos(kx)$ La famille $\{f_k\}_{k=1\dots n}$ est-elle libre ou liée ?

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{kx}$.
Cette famille est-elle libre ou liée ?

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1 < \dots < a_n$ des réels. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $(h_k)_{1\leq k\leq n}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = |x - a_k|$$

Cette famille est-elle libre ou liée ?

Exercice 9
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Dans E on considère les polynômes : $P_1 = X - a$, $P_2 = (X - a)^2$, $\dots P_n = (X - a)^n$.
La famille $\{P_1; P_2; ...; P_n\}$est-elle libre ou liée ?

I.2 Famille génératrice

Définition 4.

Soit E un espace vectoriel.
Une famille $(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$‘de vecteurs de E est dite **génératrice** de E si $E = \text{vect}(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$.

Remarque :
Cela signifie que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p$.

Exemple
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$

Exemple
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$

Exemple
$\big(1, (X - 1), (X - 1)^2\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$

Proposition 5.

Soit E un espace vectoriel. Toute famille de vecteur de E **contenant une famille génératrice de** E est génératrice de E.

Exemple
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$

Exercice 10
Soit F l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$. Trouver une famille génératrice de F.

I.3 Bases

Définition 5.

Soit E un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{F}$ est une **base** de E si elle est libre **et** génératrice.

Exemple

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car elle est libre et génératrice.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$: elle est libre mais pas génératrice.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$: elle est génératrice mais pas libre.

Proposition 6 (Caractérisation)**.**

Une famille $(\vec{u}_1,\dots\vec{u}_n)$ est une **base de** E si et seulement si tout élément de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$, c'est-à-dire si pour tout $\vec{v}\in E$, il **existe un unique** $(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\vec{v}=\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_n\vec{u}_n$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ sont les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1,\dots\vec{u}_n)$.

Exemple *Bases classiques*

1. Base canonique de $\mathbb{K}^n$. La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ avec $e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: $(1,X,X^2,\dots X^n)$
3. Pour tout $a\in\mathbb{K}$, la famille $(1,X-a,(X-a)^2,(X-a)^3,\dots(X-a)^n)$ est une autre base de $\mathbb{K}_n[X]$. La décomposition d'un polynôme selon cette base est donnée par la formule de Taylor.
4. Base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$: $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$
5. Si $E=F\oplus G$ et que $\mathcal{B}_1$ est une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G alors $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base de E, appelée **base adaptée** à la décomposition $E=F\oplus G$.

Exercice 11

Trouver une base de l'espace vectoriel $F=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4; x_1-2x_2+x_4=0 \text{ et } x_1-4x_2-x_3+3x_4=0\right\}$

Exercice 12

Soit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de u dans la base (a, b, c, d)

Exercice 13

Dans $\mathbb{C}^3$ on donne $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\epsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les composantes dans cette base du vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II Dimension finie

II.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 6 (Et proposition)**.**

On dit que E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.
On sait qu'un tel espace possède alors une base finie et que toute base de cet espace est formée du même nombre de vecteurs qu'on appelle la **dimension** de celui-ci.

Définition 7.

On convient que $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Définition 8.

Dans le cas contraire où E n'admet pas de famille génératrice finie, on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Exemple
$\mathbb{K}_n[X]$ est un espace de dimension finie, $\mathbb{K}[X]$ est un espace de dimension infinie.
$\text{vect}(\cos, \sin)$ est un espace de dimension finie, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace de dimension infinie.

Remarque :
Tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ sauf $\{0_E\}$ sont de **cardinal** infini. Mais certains sont de **dimension** finie, d'autre de **dimension** infinie. Ne pas confondre la notion de dimension avec celle de cardinal.

Exemple
$\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension ....

Exemple
Soient a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, l'ensemble des solutions de l'équation $ay' + by = 0$ est une espace vectoriel de dimension ....

Exemple
Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$, l'ensemble des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est une espace vectoriel de dimension ....

Remarque :
Dans $\mathbb{R}^2$:

1. Trois vecteurs forment forcément une famille liée.

2. Un vecteur seul ne pourra jamais former une famille génératrice.

3. Deux vecteurs qui forment une famille libre forment une base.

4. Deux vecteurs qui forment une famille génératrice forment une base.

Plus généralement :

Proposition 7.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(u_1, \dots u_p)$ une famille de vecteurs. Alors

1. Si la famille est libre alors $p \leq n$.
2. Si la famille est génératrice alors $p \geq n$.
3. lorsque $p = n$ (la famille contient autant de vecteurs que la dimension) alors on a équivalence entre
   (a) La famille est une base
   (b) La famille est libre
   (c) La famille est génératrice de E

Remarque :
Dans un espace vectoriel de dimension n on a donc : Une famille libre de n vecteurs est une base.
Une famille génératrice de n vecteurs est une base.

Exercice 14
Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = 1 + X + X^2$ et $P_3 = 1 + X + X^2 + X^3$.
Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ puis déterminer les coordonnées de $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ dans cette base.

Méthode 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E on peut

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E.
2. Montrer que $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$ et que $\mathcal{F}$ est libre.
3. Montrer que $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

II.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie

Proposition 8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sev de E. F est alors de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

De plus $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$

Exercice 15
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x + y + z = 0 \right\}$$

Exercice 16
Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3. Quelle est la dimension de E ?
On considère $F = \{P \in E; P'(1) = P(-1) = 0\}$ donner une base de F ainsi que sa dimension.

Exercice 17
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \ \ 2x - 3y - 10z + 9t = 0\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.
Déterminer une base et la dimension de E.

Méthode 2.

Si F et G sont deux sev de E, pour montrer que $F = G$ on peut montrer que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 18
Soient F et G les sev de $\mathbb{R}^4$ définis par $F = \text{vect}(u, v)$ où $u = (1, 0, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 0, 1)$ et $G = \text{vect}(w, t)$ où $w = (1, 1, 1, 1)$ et $t = (2, 1, 2, 1)$.

1. Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
2. Montrer que $G \subset F$.
3. En déduire que $F = G$.

Remarque :
Si $F = \text{vect}(u_1, \dots u_p)$ et que pour tout i, $u_i \in G$ alors $F \subset G$.

Proposition 9 (Grassmann).

Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel E de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exercice 19
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$
2. Justifier que l'on peut compléter $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{B}_F$ de F.
3. Justifier de même que l'on peut compléter $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{B}_G$ de G.
4. On admet que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F+G$. et que $\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}_G$ est une base de $F \cap G$. Exprimer $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G)$ en fonction de $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_F)$, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_G)$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}_G)$
5. Conclure.

Remarque :
En particulier, si E et F sont en somme directe $(F \cap G = \{0\})$, on a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Proposition 10 (Caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie).

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soient F et G deux sev de E. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$
2. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
4. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $G = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

F et G ne sont pas supplémentaires puisque $\dim(F) = \dim(G) = 2$ donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ et $G = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.
On a $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3$ mais $F \cap G \neq \{0\}$ puisque l'intersection contient au moins le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. F et G ne sont pas supplémentaires

Exercice 20
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles : $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\right\}$ et
$G = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_3 = 0\right\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E et trouver une base adaptee à la décomposition $E = F \oplus G$.

Exercice 21
Soit $\mathcal{M}=\left\{M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & -3b+3c & a-3c \end{pmatrix} \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
Montrer que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel, en donner une base ainsi que la dimension.

Exercice 22
Déterminer une base ainsi que la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $F_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x+y-z=0\right\}$
2. $F_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x=0 \text{ et } 3y-z=0\right\}$
3. $F_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-y+z=0\right\}$

Exercice 23
Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $com(A)=\{M\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \quad /MA=AM\}$.
Montrer que $com(A)$ est un espace vectoriel et en donner une base et la dimension.

II.3 Théorèmes de la base extraite et incomplète

Théorème 1 (Théorème de la base extraite)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Exemple

Extraire une base de $\mathbb{R}^2$ de la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$.

Proposition 11 (Conséquence)**.**

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet une base.

Théorème 2 (Théorème de la base incomplète)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Exemple

Montrer que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante est libre puis la compléter en une base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Définition 9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1,\dots e_n)$ une base de E. On note $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(v)$ la matrice des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$

Exemple
Ecrire la matrice des coordonnées du polynôme X^4-3X^2+3X+1 dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

II.4 Obtention de supplémentaires

Proposition 12.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Si $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E alors $F = \text{vect}(u_1, \dots u_p)$ et $G = \text{vect}(u_{p+1}, \dots u_n)$ sont supplémentaires dans E.
2. Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Méthode 3.

Pour obtenir un supplémentaire de F dans un espace E de dimension finie :

1. on prend une base $(e_1, \dots e_k)$ de F.
2. on la complète en une base $(e_1, \dots e_n)$ de E
3. Le sous espace $\text{vect}(e_{k+1}, \dots e_n)$ est alors un supplémentaire de F.

Exemple

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - z = 0 \text{ et } 2t - z = 0\}$

Exercice 24

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in E \quad / \quad x - 2y + 3z - 4t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

1. Déterminer une base et la dimension de F.
2. On donne $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (u, v) est-elle une base de F ?
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

III Rang d'une famille de vecteurs

Définition 10.

On appelle rang d'une famille $(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$

$$\text{rg}(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p) = \dim(\text{vect}\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\})$$

Exemple

Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Proposition 13.

Si $\mathcal{F}$ contient une famille libre de p vecteurs alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \geq p$.

Proposition 14.

Si $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p\}$ est telle qu'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots \lambda_P \vec{v}_p = \vec{0}$ alors alors $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p - 1$.

Exercice 25

On considère la famille de $\mathbb{R}^3$ suivante (u, v, w) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de (u, v, w).

Proposition 15.

Soit E un esace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_1, \dots u_p)$ une famille de vecteurs. Alors

1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \text{Card}(\mathcal{F})$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
2. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

Exemple

Déterminer $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$