Chapitre 24 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

I Produit scalaire

I.1 Définitions

Définition 1 (Produit scalaire)**.**

On appelle **produit scalaire sur** E toute application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

— $\forall (x,y) \in E^2$, $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$**(symétrique)**

— $\forall y \in E$, $x \longmapsto \Phi(x,y)$ est linéaire et $\forall x \in E$, $y \longmapsto \Phi(x,y)$ est linéaire **(bilinéaire)**

— $\forall x \in E$, $\Phi(x,x) \geq 0$ **(positive)**

— $\forall x \in E$, $\Phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ **(définie)**

Si Φ est un produit scalaire sur E, on note souvent $\Phi(x,y) = \langle x, y\rangle$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

Remarque :

· On peut munir un espace ($\mathbb{R}^n$ par exemple) de tout un tas de produits scalaires différents. On rencontre les notations $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

· Si on montre d'abord la symétrie, il suffit de montrer la linéarité à gauche (ou à droite) pour avoir la bilinéarité · Par linéarité selon la première (ou la deuxième) variable, on remarque que si Φ est un produit scalaire sur E et $x \in E$ alors :

$$\Phi(0_E, x) = \Phi(x, 0_E) = 0.$$

Définition 2 (Espace préhilbertien, espace euclidien)**.**

Soit E un espace vectoriel.

— On dit que E est un **espace préhilbertien** si E est muni d'un produit scalaire ;

— On dit que E est un **espace euclidien** si E est muni d'un produit scalaire <u>et</u> E est de dimension finie.

✍ **Exemple 1**
L'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire classique est un espace euclidien.

I.2 Exemples classiques

Proposition 1 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

L'application définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$ par
$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^n$.

Idée :
On vérifie les 4 points.

Remarque :
· Si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentent les matrices colonnes de $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $x \cdot y$ se réécrit dans le monde des matrices $X^{\mathrm{T}}Y$.
· Si E est de dimension finie, alors en fixant une base de E on a un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$. Cela nous conduit à construire un produit scalaire naturel sur E.

Proposition 2 (Produit scalaire canonique sur un espace de dimension finie).

Soit E un e.v. de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on considère
$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
Cette application ainsi définie est un produit scalaire sur E.

Idée :
Même démonstration que pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

✎ **Exercice 1**
Montrer que l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Proposition 3 (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).

L'application définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$ par
$$(A, B) \longmapsto (A^{\mathrm{T}}B)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé **produit scalaire canonique**.

Idée :
On utilise le fait que la transposée est linéaire et ne change pas la trace.

Proposition 4 (Produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues)**.**

Soit $a < b$ deux réels.
L'application définie sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$ par :

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Idée :
On vérifie les 4 points.

Remarque :
La même application n'est pas un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions en escaliers $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ car le 4e point n'est pas vérifié.

✎ **Exercice 2**
Soit $a < b$ deux réels.
L'application définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ par :

$$(P,Q) \longmapsto \int_a^b P(t)Q(t)\,dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

✎ **Exercice 3**
Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k) \end{cases}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

II Norme issue d'un produit scalaire

II.1 Définition et premières propriétés

Définition 3 (Norme associée à un produit scalaire)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$. La **norme euclidienne** d'un vecteur $x \in E$ est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}.$$

✍ **Exemple 2**
Calculer la norme de $(1,0)$ et $(2,3)$ pour la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$

✎ **Exercice 4**
Calculer la norme de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour la norme associée au produit scalaire $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Proposition 5 (Propriétés d'une norme)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée. Soit $x \in E$.

1. On a : $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$. (**séparation**)
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. (**homogénéité**)

Idée : 1. $\Rightarrow$ Caractère défini du produit scalaire. $\Leftarrow$ Bilinéarité du produit scalaire.

2. Bilinéarité du produit scalaire.

Remarque :
· Une norme d'un vecteur s'interprète comme sa longueur (entre 0_E et le point d'arrivée).
· Il existe des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire : ce sont des applications qui vérifient les 2 points de la proposition précédente et l'inégalité triangulaire.

Définition 4 (Distance entre deux vecteurs)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ sa norme associée et $x, y \in E$. On appelle **distance entre** x **et** y le nombre noté $d(x, y)$ défini par :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Remarque :
Cette **distance sur** E définit une distance au sens mathématique :

— Symétrique : $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$

— Séparation : $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$

— Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

II.2 Identités remarquables

Proposition 6 (Identités remarquables)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée.

1. Développement : pour $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

2. Identité de polarisation : pour $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

3. Identité du parallélogramme : pour $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Idée :
On repart de la définition et des propriétés du produit scalaire.

Remarque :
· Ces identités généralisent les relations connues dans $\mathbb{R}$.
· L'identité du parallèlogramme signifie que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.
· Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille finie de vecteurs alors $\left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \langle e_i, e_k \rangle$.

II.3 Inégalités fondamentales

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée. On a, pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, l'inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Idée :
Si $y \neq 0_E$, on considère le polynôme $P(t) = \|x + ty\|^2$. Son discriminant étant négatif, cela donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 7 (Corollaire : Inégalités usuelles).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

2. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On a :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f\right| \leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}.$$

Idée :
Inégalité de Cauchy-Schwarz avec le bon produit scalaire dans le bon espace.

✎ **Exercice 5**
Etudier les cas d'égalité

✎ **Exercice 6**
Montrer que pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leq 2\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}$$

✎ **Exercice 7**
Montrer que pour tout $(a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n^2}$,

$$\left|\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$$

et étudier le cas d'égalité.

✎ **Exercice 8**
Soient $a < b$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

Remarque :
De nombreuses inégalités en analyse proviennent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour les expliciter, il faut exhiber le bon produit scalaire sur le bon espace vectoriel.

Proposition 8 (Corollaire : Inégalités triangulaires)**.**

On a, pour tous $x, y \in E$:

1. $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x \pm y\|$

Idée :
On développe $\|x+y\|^2$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III Orthogonalité

III.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 5 (Vecteurs orthogonaux)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont **orthogonaux** si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Remarque :
· L'orthogonalité dépend du produit scalaire choisi et du bon espace : sin et cos sont orthogonaux dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire classique.
· Si $x \in E \backslash \{0_E\}$ alors x et $-x$ ne sont jamais orthogonaux (quel que soit le produit scalaire !).

III.2 Théorème de Pythagore

Théorème 2 (de Pythagore)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée. Soit $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \quad \text{et} \quad y \quad \text{sont orthogonaux} &\Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Idée :
On développe !

III.3 Familles orthogonales, orthonormales

Définition 6 (Familles orthogonales, orthonormales)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée. Soit $= (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

— est **orthogonale** si les vecteurs de sont orthogonaux deux à deux :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

— est **orthonormale** si est orthogonale et tous ses vecteurs sont de norme 1 :

$$\forall i, j \in I,\ \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

✍ **Exemple 3**
La base canonique dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est une base orthonormale. Idem pour E euclidien avec le produit scalaire euclidien associé à une base.

✍ **Exemple 4**
Les fonctions sin et cos forment une famille orthogonale mais non orthonormale dans $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire vu plus haut.

✎ **Exercice 9**

Pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que la base canonique n'est pas orthonormale mais que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ l'est.

✎ **Exercice 10**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $s_n : t \mapsto \sin(nt)$. Montrer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale dans $(\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$

Proposition 9 (Propriétés d'une famille orthogonale)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée. Si $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de E

1. alors pour tout $J \subset I$ fini, $\left\| \sum_{i \in J} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|e_i\|^2$
2. et si $\mathcal{F}$ ne contient pas 0_E alors est une famille libre.

Idée : 1. On développe le produit scalaire en prenant soin d'utiliser un indice différent pour chaque somme.
2. On revient à la définition et on injecte l'égalité nulle dans le produit scalaire $\langle \cdot, e_i \rangle$ pour sortir $\lambda_i = 0$.

Remarque :

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale alors elle est libre et $\left\| \sum_{k=1}^{p} e_k \right\| = \sqrt{p}$ (en particulier pour $p = 2$, on retrouve la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1).

Proposition 10 (Corollaire : Base orthonormale)**.**

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\mathcal{F}$ une famille de E.
Si $\mathcal{F}$ est orthonormale et si $\mathcal{F}$ possède n vecteurs alors $\mathcal{F}$ est une base de E, appelée **base orthonormale**.

Idée :
Si $\mathcal{F}$ est orthonormale alors $\mathcal{F}$ ne contient pas le vecteur $0_E\dots$

Proposition 11 (Expression des coordonnées dans une bon)**.**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ admettant une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.
Pour tout $x\in E$, on a :

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

Idée :
On écrit la décomposition de x dans la base $\mathcal{B}$ puis on calcule $\langle x|e_i\rangle$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Remarque :
En général il peut être fastidieux de calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base quelconque (en particulier en dimension infinie !). Cette proposition nous donne un moyen de calculer les coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n.

III.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 7 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et V un sous-ensemble de E. L'**orthogonal de** V **dans** E est défini par

$$V^\perp=\{x\in E,\ \forall y\in V,\ \langle x,y\rangle=0\}.$$

✍ **Exemple 5**
Si $E=\mathbb{R}^2$ alors l'orthogonal de 0 est $0^\perp=\dots$

✎ **Exercice 11**
Soit $E=\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et $X=\mathrm{vect}(1,1)$. Déterminer $X^\perp$

Remarque :
L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E quel que soit le produit scalaire.

Proposition 12 (Propriétés de l'orthogonal d'un s.e.v.)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et V,W deux parties de E. On a :

1. $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si $V\subset W$ alors $W^\perp\subset V^\perp$.
3. Si $V=\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_p)$ alors : $x\in V^\perp\iff\langle x,e_i\rangle=0\ \ \forall i\in[\![1,p]\!]$.
4. On a $V\subset\left(V^\perp\right)^\perp$.

Idée : 1. On utilise la caractérisation des s.e.v.

2. Jeu de définition.
3. Sens direct : immédiat car les e_i sont des vecteurs de V. Sens réciproque : on utilise la décomposition d'un vecteur quelconque de V dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ et la linéarité du produit scalaire selon la deuxième variable.
4. Jeu de définition.

Remarque :
Le troisième point nous fournit un moyen pratique pour déterminer l'orthogonal $V^\perp$. Au lieu de vérifier l'orthogonalité sur une infinité de vecteurs, on se contente des p vecteurs de la base. Cela conduit à un système linéaire à p équations.

IV Projections orthogonales

IV.1 Supplémentaire orthogonal

Théorème 3 (Supplémentaire orthogonal)**.**

Soit E un espace préhilbertien. Si V est un s.e.v. de dimension finie de E alors :

$$E = V \oplus V^\perp$$

et $V^\perp$ est appelé **supplémentaire orthogonal de V dans E.**
Plus précisément, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une b.o.n. de V alors pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right).$$

Idée :
On utilise la caractérisation $V \cap V^\perp = \{0_E\}$ puis on montre $E = V + V^\perp$.

Remarque :
En général, étant donné un s.e.v. de dimension finie, il existe une infinité de supplémentaires dans E. Un seul est l'orthogonal.

Proposition 13 (Corollaire : Dimension finie et supplémentaire orthogonal)**.**

Soit E un espace euclidien de dimension n et V un s.e.v. de E. On a :

1. $\dim\left(V^\perp\right) = \dim(E) - \dim(V)$
2. $\left(V^\perp\right)^\perp = V$

✎ **Exercice 12**
Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer le supplémentaire orthogonal du plan d'équation $x - y - z - t = 0$

Idée :
Conséquence directe du théorème précédent en dimension finie.

IV.2 Projecteurs orthogonaux

Définition 8 (Projecteur orthogonal)**.**

Soit E un espace préhilbertien et V un s.e.v. de dimension finie de E. On appelle **projecteur orthogonal sur** V, noté $\bar{p}_V$, tout projecteur sur V parallèlement à $V^\perp$.

✍ **Exemple 6**
L'application $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $p(x, y) = x$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}e_1$.

✎ **Exercice 13**
On munit $E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$f \cdot g = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

Soit $F = \{f \in E, f'' + f = 0\}$ et x la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $x(t) = t$. Déterminer le projeté orthogonal de x sur F.

Théorème 4 (Expression de la projection orthogonale)**.**

Soit E un espace préhilbertien et V un s.e.v. de dimension finie de E. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de V, alors pour tout $x \in E$:

$$\bar{p}_V(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Idée :
On décompose x comme dans le théorème du supplémentaire orthogonal.

Remarque :
· Calculer la projection orthogonal de x sur $V = \text{vect}\{e_1\}$ un e-v de dimension 1 revient à calculer le produit scalaire $\langle x, e_1\rangle$.
· Si E est euclidien alors on a $E = V \oplus V^\perp$ et $\bar{p}_{V^\perp} = \text{id}_E - \bar{p}_V$.
· Si $E = V \oplus V^\perp$ alors $\text{id}_E = \bar{p}_V + \bar{p}_{V^\perp}$.

✎ **Exercice 14**
Dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^{2\pi} fg$, on considère $F = \text{vect}(\cos,\sin)$. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F

✎ **Exercice 15**
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E de vecteur normal a. On note p la projection orthogonale sur H. Soit $x \in E$, déterminer $p(x)$.

IV.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 5 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.**

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pour toute famille libre $(u_1,\dots,u_p)$ de E, il existe une famille $(e_1,\dots,e_p)$:

1. orthonormale ;
2. pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\text{vect}\{u_1,\dots,u_k\} = \text{vect}\{e_1,\dots,e_k\}$.

Idée :
On construit de proche en proche les vecteurs u_1. A chaque étape on soustrait à u_k sa projection orthogonale sur $(e_1,\dots,e_{k-1})$, sans oublier de normaliser.

✎ **Exercice 16**
Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. On considère les fonctions e_1, e_2 et e_3 définies sur $[-1,1]$ par

$$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t, \quad e_3(t) = t^2$$

Orthonormaliser la famille (e_1,e_2,e_3)

Méthode 1 (Rendre une famille libre orthonormale).

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E.
- On pose $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.
- On pose $\tilde{e}_2 = u_2 - \bar{p}_{\mathrm{vect}\{e_1\}}(u_2) = u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1$ puis $e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$.
- On pose $\tilde{e}_3 = u_3 - \bar{p}_{\mathrm{vect}\{e_1,e_2\}}(u_3) = u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2$ puis $e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|}$.
- ...

De proche en proche, on retire à chaque vecteur u_k ses composantes en la famille orthonormale $(e_1, \dots, e_{k-1})$ puis on normalise.

Remarque :
· Il n'y a pas unicité d'une telle famille orthonormale : chaque e_i pourrait être remplacé par $-e_i$. L'unicité est obtenue si on impose de plus $\langle e_k, u_k\rangle > 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
· Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur une b.o.n. ne la change pas.

Proposition 14 (Corollaire : Existence d'une base orthonormale).

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

Idée :
Comme tout espace vectoriel de dimension finie admet une base, il suffit de l'orthonormaliser.

✎ **Exercice 17**
Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$, déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$

Proposition 15 (Corollaire : Base orthonormale incomplète).

Soit E un espace euclidien de dimension n. On fixe un entier $p \leq n$. Pour toute famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$, il existe des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de sorte que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ désigne une base orthonormale de E.

Idée :
Théorème de la base incomplète et on constate que l'algorithme de Gram-Schmidt ne change pas les vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

IV.4 Théorème de minimisation

Définition 9 (Distance d'un vecteur à un sous-espace).

Soit E un espace préhilbertien et V un s.e.v. de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on appelle **distance de x à V** le réel :

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\|.$$

Remarque :
La définition de $d(x, V)$ étend la définition de distance entre deux vecteurs : $d(x, V) = \inf_{y \in V} d(x, y)$.

Théorème 6 (de minimisation)**.**

Soit E un espace préhilbertien et V un s.e.v. de dimension finie de E. La distance de x à V est atteinte par $\bar{p}_V(x)$:

$$d(x,V) = \|x - \bar{p}_V(x)\|.$$

De plus $\bar{p}_V(x)$ est l'unique vecteur qui atteint l'inf.

Idée :
Pour $x \in E$ et $y \in V$, on applique le théorème de Pythagore à $(x - \bar{p}_V(x))$ et $(\bar{p}_V(x) - y)$.

✎ **Exercice 18**
Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

✎ **Exercice 19**
Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\cos(t) + b\sin(t) - 1)^2 dt$$

✎ **Exercice 20**
1. Montrer que l'application

$$(P,Q) \mapsto P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ orthonormale pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$

Proposition 16 (Corollaire : Cas des hyperplans)**.**

Soit E un espace euclidien et $H = \mathrm{vect}\{u\}^\perp$ un hyperplan de E.

1. La projection orthogonale de E sur H s'écrit $p : x \longmapsto x - \langle x|u\rangle \frac{u}{\|u\|^2}$.
2. Pour tout $x \in E$, on a $d(x,H) = \dfrac{|\langle x,u\rangle|}{\|u\|}$.

Idée :
1. On vérifie que p est bien la projection orthogonale sur H.
2. On applique le théorème de minimisation.

Remarque :
· Le vecteur $x - \langle x|u\rangle \frac{u}{\|u\|^2}$ est le vecteur x auquel on a soustrait sa composante en u. Cette dernière s'écrit $\left\langle x|\frac{u}{\|u\|}\right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \langle x|u\rangle \frac{u}{\|u\|^2}$ par linéarité selon la deuxième variable.
· En dimension 3, le calcul de la distance d'un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ au plan d'équation $P : ax + by + cz = 0$ est donnée par

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$