Chapitre 14 : Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Espaces vectoriels

I.1 La définition !

Définition 1 (Définition).

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois : une loi d'**addition interne** $+ : E \times E \to E$ et une loi de **multiplication externe** $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ si les deux lois vérifient :

1. (i) Associativité : $\forall (u, v, w) \in E^3$,
$$(u+v)+w = u+(v+w)$$
   (ii) Commutativité : $\forall (u, v) \in E^2$,
$$u+v = v+u$$
   (iii) Exixtence d'un élément neutre pour l'addition : Il existe un unique élement de E, noté 0_E, tel que : $\forall u \in E$,
$$u + 0_E = u$$
   (iv) Existence d'un opposé pour tout u : Pour tout $u \in E$, il existe un unique élément de E, noté $-u$, tel que
$$u + (-u) = 0_E$$
2. (i) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall u \in E$,
$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$$
   (ii) La loi $\cdot$ est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E$,
$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$
   (iii) La loi $\cdot$ est distributive par rapport à l'addition de E : $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$
   (iv) $\forall u \in E$,
$$1 \cdot u = u$$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

✍ **Exemple 1**
L'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

✍ **Exemple 2**
L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

✍ **Exemple 3**
L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}$ des vecteurs de l'espace muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

✍ **Exemple 4**
L'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Proposition 1 (Règles de calcul dans un espace vectoriel).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour tout vecteurs $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. Produit valant 0_E : $\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$
4. Construction de l'opposé : $(-1) \cdot u = -u$

I.2 Exemples classiques

Proposition 2 (Espace $\mathbb{K}^n$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets $(x_1, \dots x_n)$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :
L'élément neutre de $\mathbb{K}^n$ est ....

Proposition 3 (Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Soit $(n, p) \in (\mathbb{K}^*)^2$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n-lignes et p colonnes muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :
L'élément neutre de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est ....

Proposition 4 (Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :
L'élément neutre de $\mathbb{K}[X]$ est ....

Proposition 5 (Ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{K}$).

Si Ω est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ des applications de Ω dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :
L'élément neutre de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ est ....

Proposition 6 (Ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$).

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :
L'élément neutre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est ....

Proposition 7 (Produit cartésien de deux espaces vectoriels).

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors le produit $E \times F$ muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I.3 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition 2 (Combinaison linéaire de vecteurs).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient u_1, u_2, ... u_p des éléments de E.
On dit qu'un vecteur u est **combinaison linéaire** de u_1, u_2, ... u_p s'il existe des scalaires λ_1, λ_2, $\ldots\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

On note $\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de u_1, u_2, ... u_p.

✍ **Exemple 5**
Montrer que $(3,4)$ est combinaison linéaire de $(1,2)$ et $(-1,3)$

✎ **Exercice 1**
Montrer que $(5,2)$ est combiniaison linéaire de $(1,0)$ et $(1,1)$

✍ **Exemple 6**
Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{vect}((1,0,0)(0,1,0))$$

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathrm{vect}(\cos, \sin)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathrm{vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$$
$$\mathrm{vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

est l'ensemble des matrices diagonales

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures

✎ **Exercice 2**
Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer $\mathrm{vect}\{(1,2),(3,6)\}$

✎ **Exercice 3**
Montrer que $\mathrm{vect}\{(1,2),(1,0)\} = \mathbb{R}^2$

✎ **Exercice 4**
Montrer que si P est un polynôme de degré n alors $P \in \mathrm{vect}(1, X, \ldots X^n)$

II Sous-espaces vectoriels

Définition 3 (Sous-espace vectoriel).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (noté sev) lorsque F est **non vide** et **stable par addition et par multiplication par un scalaire**.

Proposition 8 (Elément neutre)**.**

Si F est un sev de E alors $0_E \in F$

Proposition 9 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous ensemble de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $0_E \in F$
2. $\forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u + v \in F$

✍ **Exemple 7**
Soit E un espace-vectoriel. L'ensemble $\{0_E\}$ est un sev de E

✍ **Exemple 8**
Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$

Méthode 1 (Montrer qu'un sous-ensemble est un sev)**.**

Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E est un sev de E on rédige de la manière suivante :

1. Montrons que 0_E appartient à F
2. Soit u et v deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda u + v \in F$

✍ **Exemple 9**
Montrons que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ **Exercice 5**
Montrer que l'ensemble suivant est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\}$$

✎ **Exercice 6**
Montrer que l'ensemble suivant est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0 \text{ et } 3x - 4y + 2z = 0\right\}$$

✍ **Exemple 10**
Soit $F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 1\right\}$, $F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\right\}$, $F_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0 \text{ ou } x - y = 0\right\}$, et $F_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y \leq 0\right\}$ Sont-ils des sev de $\mathbb{R}^2$?

Méthode 2 (Montrer qu'un sous-ensemble n'est pas un sev)**.**

Pour montrer qu'un sous ensemble F de E n'est pas un sev de E on peut :

— Montrer que 0_E n'appartient pas à F
ou

— Trouver deux élements u et v de F tels que $u + v$ n'appartient pas à F
ou

— Trouver un élément u de F et un scalaire λ tel que $\lambda \cdot u$ n'appartient pas à F

✍ **Exemple 11** *Sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels classiques*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(2) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. L'ensemble des solutions d'un système **linéaire homogène** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
5. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire homogène** d'ordre 2 à coefficients constants est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✍ **Exemple 12** *Ne sont pas des sous-espaces vectoriels*

1. L'ensemble des polynômes de degré n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(2) = 1\}$ n'est pas un sous-espace de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. l'ensemble des solutions d'un système linéaire **non homogène** n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
4. l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **non homogène** n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✎ **Exercice 7**
Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 1\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ **Exercice 8**
Montrons que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ **Exercice 9**
Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ **Exercice 10**
Montrer que l'ensemble suivant n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1$$

✎ **Exercice 11**
Soit $(\mathcal{S})$ le système $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$
Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

✎ **Exercice 12**
Les espaces suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y - z = 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y - z = 1\right\}$

Proposition 10 (Un sev est lui-même un espace vectoriel !)**.**

Si $(E, +, .)$ est un espace vectoriel et si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.

Remarque :

Méthode 3 (Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel)**.**

Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on n'utilise (presque) jamais la définition 1 mais :

1. On trouve un espace vectoriel E « de référence » contenant F
2. On montre que F est un sous-espace vectoriel de E.

✎ **Exercice 13**
Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0 \text{ et } 2x - 7y = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

✎ Exercice 14
Déterminer dans chaque cas si l'ensemble est ou non un espace vectoriel.
(Remarque : à refaire plus tard en utilisant le fait que le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous espace vectoriel de E).

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - 2x = y\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - 2x - y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t \leq 1\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t \leq 0\}$
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(X + 1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$
6. $F_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 1\}$
7. $F_7 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(X + 1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 1\}$
8. $F_8 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f(1) = 0\}$
9. $F_9 = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/u_0 = 1\right\}$
10. $F_{10} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/u_1 = 0\right\}$
11. $F_{11} = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\right\}$
12. $F_{12} = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\int_{-1}^{1} f(t)dt = 3\right\}$
13. $F_{13} = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})/f'' + f' + 2f = 0\right\}$
14. $F_{14} = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})/f^2 - f' = 0\right\}$
15. $F_{15} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ \lim u_n = 0\right\}$
16. $F_{16} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ \ u \text{ diverge } \right\}$
17. $F_{17} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/xz = 0\right\}$
18. $F_{18} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/y = 0\right\}$
19. $F_{19} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/x + y = 0 \text{ et } z - 6t = 0\right\}$
20. $F_{20} = \left\{(u_n)/u_n = o(n^2)\right\}$
21. $F_{21} = \{P \in \mathbb{R}[X]; (X + 1)P' = 2P \text{ et } P(3) = 0\}$
22. $F_{21} = \{P \in \mathbb{R}[X]; (X + 1)P = 2P \times P' \text{ et } P(3) = 0\}$

Remarque :
Soit E un espace vectoriel. Si $F \subset E$ est un espace vectoriel alors F est un sev de E

Proposition 11 (Sous-espace engendré par une famille de vecteurs)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vetoriel et u_1, $u_2 \cdots u_p$ des éléments de E. Alors $\text{vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré par** u_1**,** $u_2 \cdots u_p$. C'est le plus petit sev contenant $u_1, \dots u_p$.

Méthode 4 (Pour montrer qu'un sous-ensemble est un sev)**.**

Pour montrer qu'un sous-ensemble F de E est un espace vectoriel on peut montrer que $F = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$ avec $u_1, \dots, u_p$ des éléments de E.

✍ Exemple 13
Montrer grâce à la méthode qui précède que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - 3z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

✎ Exercice 15
Montrer que les sous-ensembles suivants sont des espaces vectoriels en les écrivant sous la forme de $\text{vect}(\mathcal{F})$

1. $F_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + 2y - 3z = 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - 3z = 0 \text{ et } x + y = 0\right\}$
3. $F_3 = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f'' + f = 0\right\}$
4. $F_4 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ x \mapsto (a + b)x^2 + (a - b)x + 3a + 2b/(a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
5. F_5 est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 dont la dérivée première et la dérivée seconde sont nulles en 2.

Remarque :
Si $F = \text{vect}(u_1, \dots u_p)$ on dit que $\{u_1, \dots u_p\}$ est une famille **génératrice** de F.

Proposition 12 (Sev engendré par une famille de vecteur appartenant tous à un autre)**.**

Soit E un espace vectoriel et G un sev de E.
Si $F = \text{vect}(u_1, \dots u_p)$ et que pour tout i, $u_i \in G$ alors $F \subset G$. Autrement dit F est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev contenant $u_1, u_2, \dots u_p$.

✎ **Exercice 16**
On donne dans $\mathbb{R}^3$ quatre vecteurs : $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -1, -2)$,$w = (3, 7, 0)$, $z = (5, 0, -7)$.
Montrer que $\text{vect}(u, v) = \text{vect}(w, z)$ en utilisant la proposition précédente.

Proposition 13 (Intersection de deux sev)**.**

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

✍ **Exemple 14**
L'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $\{(x, y, z), x - y + z = 0\}$ est un espace vectoriel.

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$$

✎ **Exercice 17**
Soient $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ et $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ est un espace vectoriel.
3. L'ensemble $F \cup G$ est-il un espace vectoriel ?

Définition 4 (Somme de deux sev)**.**

1. Si F et G sont deux sev de E, on appelle **somme de** F **et** G et on note $F + G$ l'ensemble des vecteurs w qui s'écrivent sous la forme
$$w = u + v$$
avec $u \in F$ et $v \in G$.
2. Si de plus cette écriture est **unique**, la somme est dite **directe** et on la note $F \oplus G$.

Proposition 14 (La somme de deux sev est un sev)**.**

Si F et G sont deux sev de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sev de E contenant $F \cup G$

✍ **Exemple 15**
$F = \text{vect}\{(1, 0, 0)\}$ et $G = \text{vect}\{(0, 1, 0)\}$ Déterminer $F + G$. La somme est-elle directe ?

✍ **Exemple 16**
Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \text{vect}\{(1, 0), (0, 1)\}$ et $G = \text{vect}\{(1, 1)\}$.
Montrer que $F + G = \mathbb{R}^2$.
La somme $F + G$ est-elle directe ?

Remarque :
Cette définition n'est pas facilement exploitable pour déterminer si une somme est directe ou non.

Proposition 15 (Caractérisation des sommes directes)**.**

Soit F et G deux sev de E.
La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Méthode 5 (Montrer qu'une somme est directe)**.**

Pour montrer qu'une somme est directe on prend un élément quelconque u de $F \cap G$ et on montre que $u = 0_E$.

Proposition 16 (Caractérisation des sommes directes qui sera très utile l'an prochain)**.**

Soit F et G deux sev de E.
La somme $F+G$ est directe si et seulement si

$$\forall (u_1, u_2) \in F \times G, \quad (u_1 + u_2 = 0_E \Rightarrow (u_1 = 0_E \text{ et } u_2 = 0_E))$$

Méthode 6 (Montrer qu'une somme est directe)**.**

Pour montrer qu'une somme est directe on prend $(u_1, u_2) \in F \times G$ tels que $u_1 + u_2 = 0_E$ et on montre que $u_1 = u_2 = 0_E$.

✍ **Exemple 17**
Reprendre les deux exemples précédents à l'aide de ces caractérisations.

✎ **Exercice 18**
Soit $F = \text{vect}\left\{(1,0,-1),(0,1,-1)\right\}$ et $G = \text{vect}\left\{(1,0,-1),(0,1,1)\right\}$. La somme $F+G$ est-elle directe ?

✎ **Exercice 19**
Soit $F = \text{vect}\left\{(1,0,-1),(0,1,-1)\right\}$ et $G = \text{vect}\left\{(1,1,-2),(0,1,1)\right\}$. La somme $F+G$ est-elle directe ?

Proposition 17.

Si $F = \text{vect}(u_1, \dots u_p)$ et $G = \text{vect}(v_1, \dots v_r)$ alors $F + G = \text{vect}(u_1, \dots u_p, v_1, \dots v_r)$

Définition 5 (SEV supplémentaires dans E)**.**

Soient F et G deux sev de E on dit que F et G sont **supplémentaires dans** E et on note $E = F \oplus G$ lorque tout élément w de E **admet une unique décomposition** de la forme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Proposition 18 (CNS pour être supplémentaires)**.**

On a équivalence entre toutes ces propositions :

1. F et G sont supplémentaires dans E
2. $F \oplus G = E$
3. $E = F + G$ et la somme est directe.
4. $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Méthode 7.

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E, on peut raisonner en deux étapes

1. Prendre un vecteur u dans l'intersection $F \cap G$ et montrer que $u = 0_E$
2. Prendre un vecteur u dans E et lui trouver une décomposition $u = u_F + u_G$

Méthode 8.

Raisonner par analyse synthèse

✎ **Exercice 20**
$E=\mathbb{R}^2$, $F=\text{vect}\{(1,0)\}$ et $G=\text{vect}\{(0,1)\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaire dans E.

✎ **Exercice 21**
$E=\mathbb{R}^2$, $F=\text{vect}\{(1,0)\}$ et $G=\text{vect}\{(1,1)\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaire dans E.

Remarque :
Dans $\mathbb{R}^2$, si $F=\text{vect}(u)$ et $G=\text{vect}(v)$ avec u et v non colinéaires alors F et G sont supplémentaires.

✎ **Exercice 22**
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0\end{pmatrix} ; (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix} ; d\in\mathbb{R}\right\}$ montrer que F et G sont supplémentaires.

✎ **Exercice 23**
Soit $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si F désigne l'ensemble des fonctions paires et G l'ensemble des fonctions impaires alors $E=F\oplus G$.

✎ **Exercice 24**
Vérifier dans chacun des cas suivants que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $E=\mathbb{R}^4$, $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t=0\right\}$ et $G=\text{vect}\{(1,1,1,1)\}$.
2. E est l'ensemble des suites réelles convergentes, F est l'ensemble des suites réelles constantes et G l'ensemble des suites réelles de limite nulle.
3. $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\text{vect}(x\mapsto x^2)$ et $G=\{f\in E \ / \ f(-1)=0\}$

III Exercices

✎ **Exercice 25**
Soit $E=\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles F et G définis par : $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+3z=0\right\}$; $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y+2z=0 \ et \ x+2y+z=0\right\}$

1. Démontrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $F\cap G$.
3. F et G sont-ils en somme directe ?

✎ **Exercice 26**
Montrer que les deux ensembles de polynômes $F=\{P\in\mathbb{R}[X]; P(0)=0\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}[X]; \deg(P)\leq 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

✎ **Exercice 27**
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $F=\{f\in E; \int_0^1 f(t)dt=0\}$ et $G=\{f\in E; f \text{ constante } \}$ sont-ils supplémentaires dans E ?

✎ **Exercice 28**
Soient F et G deux sous espaces vectoriels tels que $F\cup G$ est un espace vectoriel. Montrer que $F\subset G$ ou $G\subset F$.

✎ **Exercice 29**
Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel tels que $E+F=E+G$ et $E\cap F=E\cap G$, $F\subset G$.

1. Montrer que $F=G$
2. L'hypothèse $F\subset G$ est-elle nécéssaire ?