Chapitre ... : Fonctions usuelles

I La fonction logarithme népérien

I.1 Définition

Définition 1.

La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

1. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
2. $\ln(1) = 0$

I.2 Propriétés

Proposition 1.

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Exercice facultatif:
En écrivant, pour $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx$, démontrer la proposition précédente

Exercice 1
Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(x^3 + 1) - \ln(x + 1)$

Exercice 2
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

I.3 Variations et limites

Proposition 2.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3
En déterminant plusieurs valeurs de la fonction logarithme népérien ainsi que les pentes des tangentes correspondante, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Proposition 3.

Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1)$
2. $\ln(x) = \ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right)$
3. $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 4$
4. $2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1 - x) = 2\ln(x)$
5. $\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) = \ln(x + 2)$
6. $\ln^4(x) - \ln^2(x) - 1 = 0$

Proposition 4.

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ 5. $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$ 2. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$ 3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}$
4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$ 5. $\lim_{x\to+\infty}(x\ln(x) - x\ln(x+2))$

II La fonction exponentielle

Définition 2.

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle exponentielle sa fonction réciproque.

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}+^* \times \mathbb{R},\ e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Proposition 5.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Exercice 6
Démontrer la proposition (en utilisant la proposition sur la dérivée de la fonction réciproque)

Proposition 6.

Pour tout réel x,
$$\exp(x) > 0$$

Proposition 7.

La fonction exp est strictement croisssante sur $\mathbb{R}$

Exercice 7
En déterminant plusieurs valeurs de la fonction exponentielle ainsi que les pentes des tangentes correspondante, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Proposition 8.

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Exercice facultatif:
A l'aide de la définition de la fonction exp, démontrer la proposition précédente.

Notation.

On note e la solution de l'équation $\ln(t) = 1$. Ainsi $\exp(1) = e$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = e^n$.
Notation : $\exp(x) = e^x$

Remarque :
$\ln(1) = 0$ donc $e^0 = 1$

Conséquence :

Proposition 9.

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
et
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

Exercice 8
Simplifier les expressions suivantes :

1. $A(x) = \dfrac{(e^x)^5 e^{-2x}}{e^{x+1}}$
2. $B(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
3. $C(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
4. $D(x) = \dfrac{e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

Proposition 10.

Pour tous réels a et b,
$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

Exercice 9
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-2x} = \frac{1}{2}$
2. $e^x = e^{x^2-2}$
3. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 2$
5. $e^x = 4e^{2x}$
6. $e^x - e^{-x} = 2$

Proposition 11.

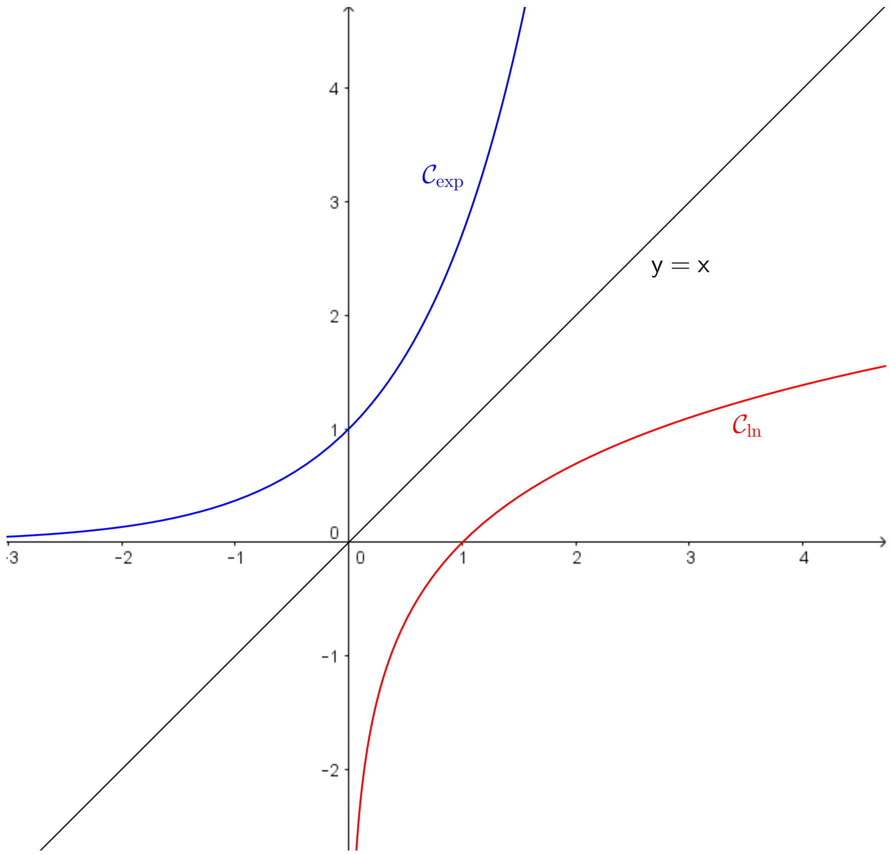
On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Exercice 10

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble de définition ainsi que les limites aux bornes.

1. $x \mapsto 3xe^{-x}$
2. $x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$
3. $x \mapsto \frac{x-5}{e^x - 1}$
4. $x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^x - 1}$
5. $x \mapsto (x+1)e^x$
6. $x \mapsto (x-2)e^{-x+2}$
7. $x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{x}$
8. $x \mapsto x\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$



III Les fonctions puissances

III.1 Les fonctions puissances entières

III.1.1 Définition

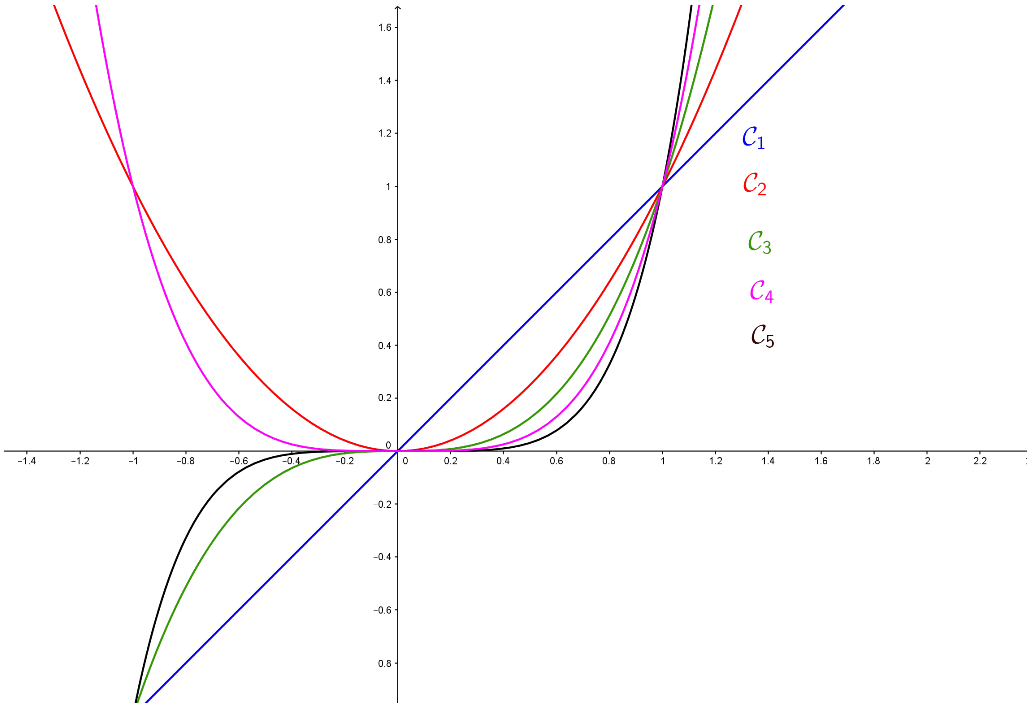
Définition 3.

Soit x un nombre réel on définit les puissances positives de x : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots x}_{n \text{ fois}}$.

Si x est un réel non nul on peut aussi définir les puissances entières négatives : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

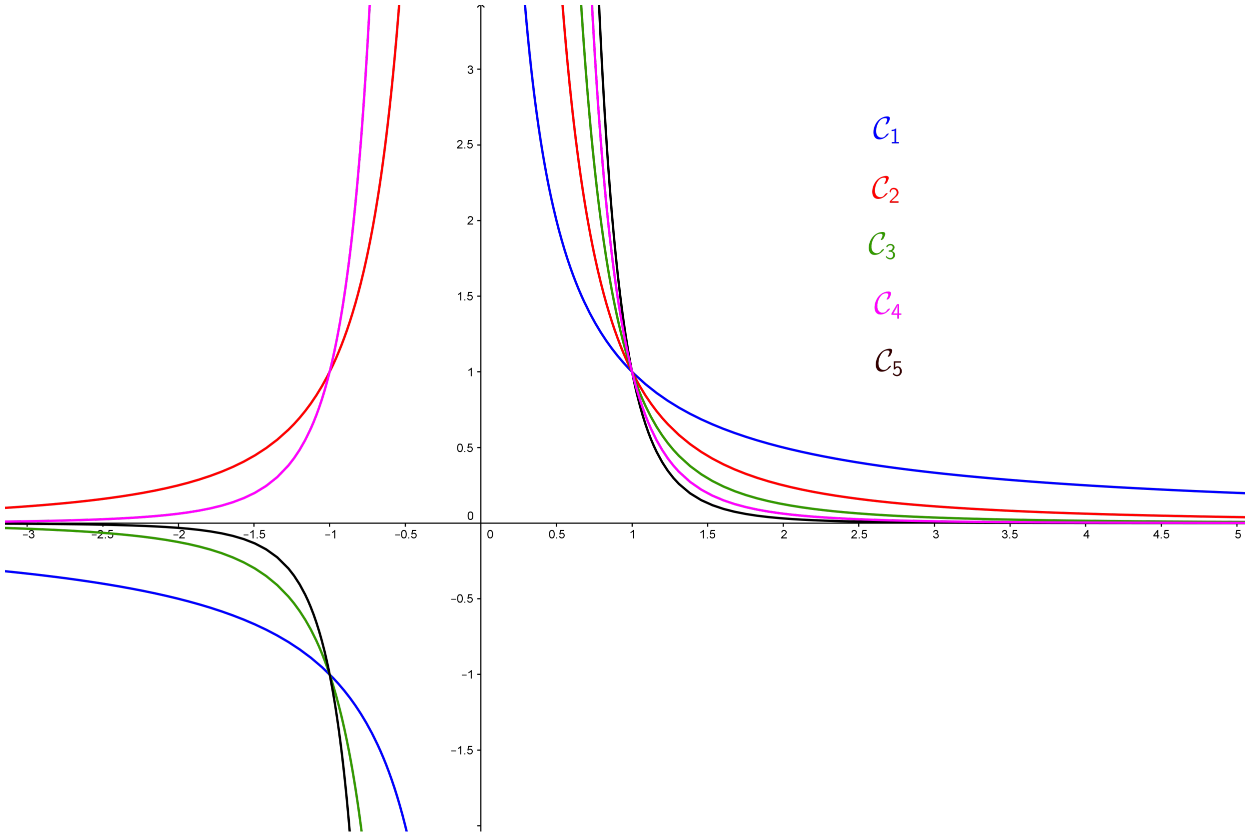
Définition 4.

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est définie sur ....



Définition 5.

Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est définie sur ....



III.1.2 Variations et limites

Proposition 12.

Les fonctions puissances entières sont dérivables sur leur ensemble de définition et la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dots\dots\dots$

Proposition 13.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement .... sur $]-\infty; 0]$ et strictement .... sur $[0; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \dots$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \dots$$

Si $n \in \mathbb{N}$ est impair la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement .... sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \dots$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \dots$$

Proposition 14.

Si $n<0$ est un entier pair alors la fonction $x\mapsto x^n$ est strictement .... sur $]-\infty;0[$ et strictement .... sur $]0;+\infty[$. De plus

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \dots\dots\dots$$

et

$$\lim_{x\to 0} x^n = \dots\dots\dots$$

Si $n<0$ est un entier impair la fonction $x\mapsto x^n$ est strictement .... sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \dots\dots\dots$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} = \dots\dots\dots$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} x^n = \dots$$

III.2 Les fonctions racines n^e

Définition 6.

Si n un entier naturel non nul, la fonction $x\mapsto x^n$ est d'après ce qui précède une bijection de $[0;+\infty[$ sur ....
On appelle fonction racine n^e la bijection réciproque.
Si x est un réel positif, la racine n^e de x que l'on note $\sqrt[n]{x}$, ou $x^{\frac{1}{n}}$ est donc l'unique réel positif y tel $y^n = x$.

Exemple
La racine carré d'un nombre positif x, notée $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.
La racine cubique d'un nombre positif x, notée $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{\frac{1}{3}}$ est l'unique réel positif y tel que $y^3 = x$.

Exercice 11
Déterminer $25^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$

III.3 Généralisation : les fonctions puissances réelles

Définition 7.

Si α est un réel quelconque et x un réel strictement positif, on définit x^α par $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$

Proposition 15.

Pour tous réels α et β et tous réels $x>0$ et $y>0$, on a :

1. $1^\alpha = 1$
2. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
3. $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
5. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
7. $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$

Exercice 12
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer leur ensemble de définition puis les écrire sous la forme $(u(x))^\alpha$ où u est une fonction à determiner et α un réel à déterminer.

1. $x \mapsto (\sqrt{x})^3$ 2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ 3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^5}$
4. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$ 5. $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$ 6. $x \mapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$

Proposition 16.

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Exercice 13
Démontrer la proposition précédente.

Remarque :
Le sens de variation de f_α sur $]0; +\infty[$ dépend donc du signe de α.

Proposition 17.

- Si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et on peut prolonger la fonction puissance α en 0 en posant $0^\alpha = 0$
- Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Proposition 18.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $]0 : +\infty[$ sur $]0 : +\infty[$, de bijection réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$

Exercice 14
Résoudre les équations suivantes :

$$x^{\frac{2}{3}} = 2$$
$$x^{\frac{3}{4}} = 8$$

IV Croissances comparées

Proposition 19.

Pour tous $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ 4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

V Complément : Fonctions exponentielles de base a

Définition 8.

Soit a un **réel strictement positif**. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\ln(a)}$ est appelée **fonction exponentielle de base** a. On note $f(x) = a^x$.

Remarque :
La fonction exponentielle est la fonction exponentielle de base e.

Exercice 15

1. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation $10^x = y$.
   On appelle logarithme décimal, la fonction $y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(y)}{\ln(10)}$. *On note* $\log(y)$ *le logarithme décimal de* y.
2. Calculer $\log(10)$, $\log(1)$, $\log(0,1)$, $\log(0,01)$.
3. Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique ?

Proposition 20.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tous x et y réels,

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

Proposition 21.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln(a)a^x$.

Exercice 16
Démontrer ces deux propositions.

Exercice 17

1. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de $x \mapsto (0,2)^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 1^x$.
2. Déterminer, selon la valeur de a, les variations de la fonction $x \mapsto a^x$
3. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto a^x$ selon la valeur de a.

Exercice 18
Résoudre les équations suivantes :

1. $3^x = 5$
2. $5^{x+1} = 7$
3. $(2^x - 1)(3^x - 2)(x^4 - 3) = 0$
4. $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$
5. $3^{x+2} + 8 = 3^{-x}$