Chapitre 6 : Rappels et compléments sur les fonctions

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I Généralités

Définition 1 (Fonction).

Une **fonction** f **de** I **dans** $\mathbb{R}$ est une correspondance, qui à tout réel x associe au plus un réel y. L'élément y dépend de x et on note $y = f(x)$.

Définition 2 (Ensemble de définition).

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeur réelles. L'**ensemble de définition** de f, noté $\mathcal{D}_f$ est le plus grand sous-ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

Remarque :
On note :

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

✍ **Exemple 1**
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition ..... et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour ensemble de définition .....

✎ **Exercice 1**
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{4x-1}$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$
3. $g : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{5-20x^2}}$
4. $h : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+10}}$

Proposition 1 (Egalité de deux fonctions).

Deux fonctions fonctions f et g sont **égales** $(f = g)$ si :

$$D_f = D_g \text{ et } \forall x \in D_f, f(x) = g(x)$$

Définition 3 (Courbe représentative).

La **courbe représentative** d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, notée $\mathcal{C}_f$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ a pour **équation** $y = f(x)$.

Remarque :
Soit $M(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
On a

$$M \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

✎ **Exercice 2**
Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto 2x+1$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition 4 (Transaltée en abscisse).

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel, on peut définir la fontion $f_a : x \mapsto f(x+a)$

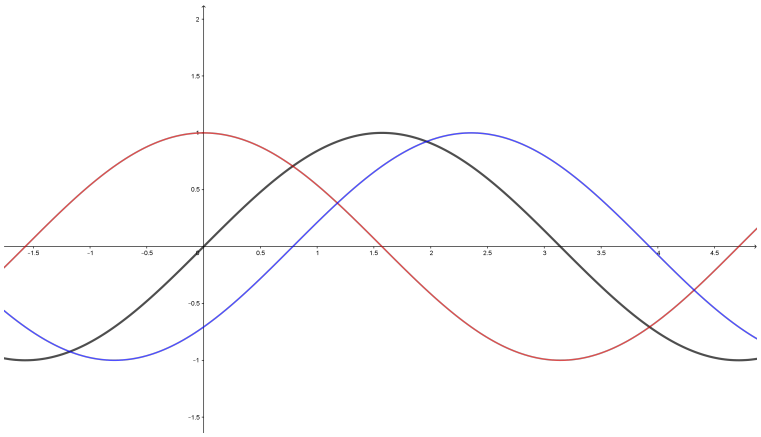
Soit $M(x;y) \in \mathcal{P}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y = f(x-a+a) \\ &\Leftrightarrow y = f_a(x-a) \\ &\Leftrightarrow (x-a;y) \in \mathcal{C}_{f_a} \end{aligned}$$

Proposition 2 (Courbe de la translatée).

La courbe représentative de $f_a : x \mapsto f(x+a)$ est la translatée de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $-a\vec{i}$.

✍ **Exemple 2**
Les courbes ci-dessous représententent les fonctions sin, $x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $x \mapsto \sin(x-\frac{\pi}{4})$:



✎ **Exercice 3**
Tracer la courbe représentative de la fonction carrée puis en déduire celle de $x \mapsto (x+3)^2$ puis celle de $x \mapsto (x-1)^2$

Définition 5 (Translatée en ordonnées).

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et b un réel, on peut définir la fontion $g_b : x \mapsto f(x)+b$

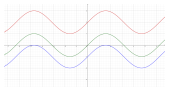
Soit $M(x;y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow (\ldots\ldots;\ldots\ldots) \in \mathcal{C}_{g_b} \end{aligned}$$

Proposition 3 (Courbe de la translatée).

La courbe représentative de g_b est la translatée de $\mathcal{C}_f$ de vecteur $b\vec{j}$.

✍ **Exemple 3**
Les courbes ci-dessous représentent les fonction sin, $x \mapsto \sin(x)+2$ et $x \mapsto \sin(x)-1$:



✎ **Exercice 4**
Déduire de la courbe représentative de la fonction carrée les courbes représentatives de $x \mapsto x^2+\frac{1}{2}$ puis celle de $x \mapsto x^2-4$

Définition 6 (Dilatation en abscisses).

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et λ un nombre réel, on peut définir la fonction $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$.

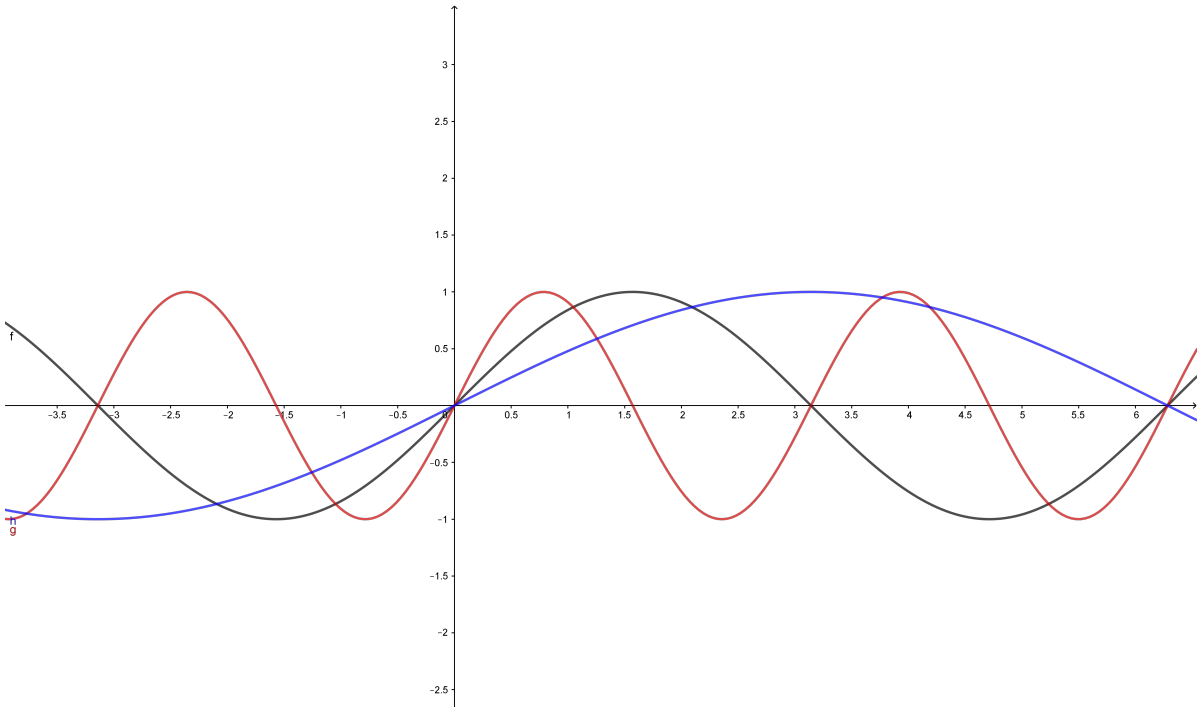
Soit $M(x;y) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow (\ldots\ldots;\ldots\ldots) \in \mathcal{C}_{f_\lambda} \end{aligned}$$

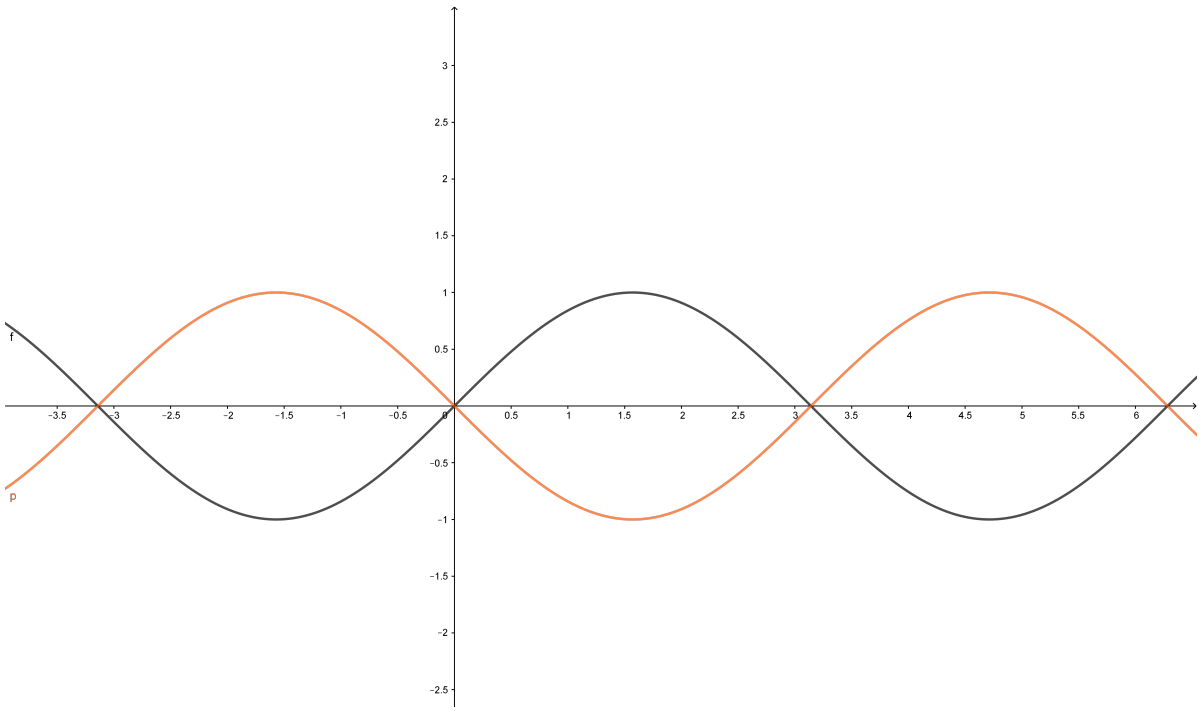
Proposition 4 (Courbe de la dilatée).

La courbe de f_λ est déduite de celle de f en multipliant, à ordonnée fixée, les abscisses par $\frac{1}{\lambda}$.

✍ **Exemple 4**
Les courbes suivantes représentent les fonctions sin, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$



✍ **Exemple 5**
Les courbes suivantes représentent les fonctions sin et $x \mapsto \sin(-x)$



✎ **Exercice 5**
On note f la fonction cosinus. Tracer les courbes représentatives de f_2 et de $f_{\frac{1}{2}}$, f_{-2}

Définition 7 (Dilatation en ordonnée)**.**

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et λ un nombre réel, on peut définir la fonction $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$.

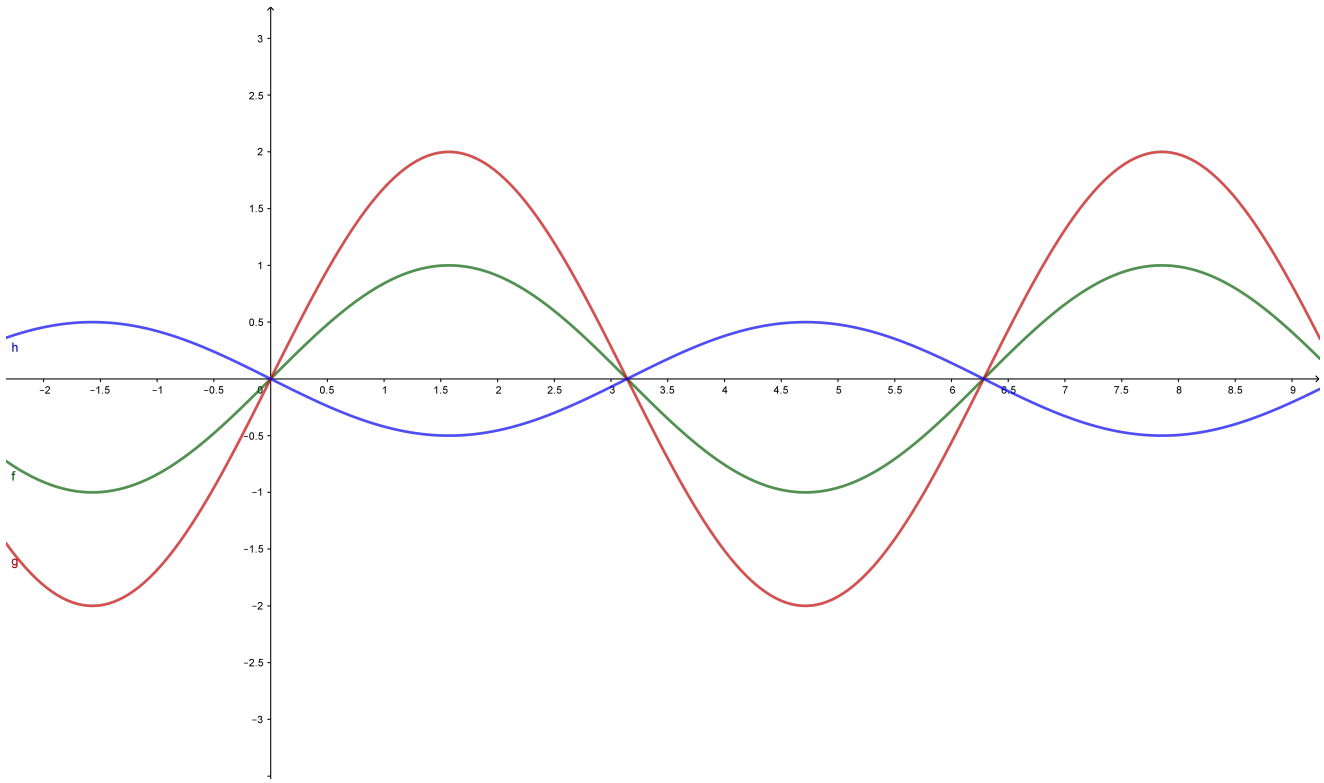
Soit $M(x;y) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow (\ldots\ldots;\ldots\ldots) \in \mathcal{C}_{\lambda \cdot f} \end{aligned}$$

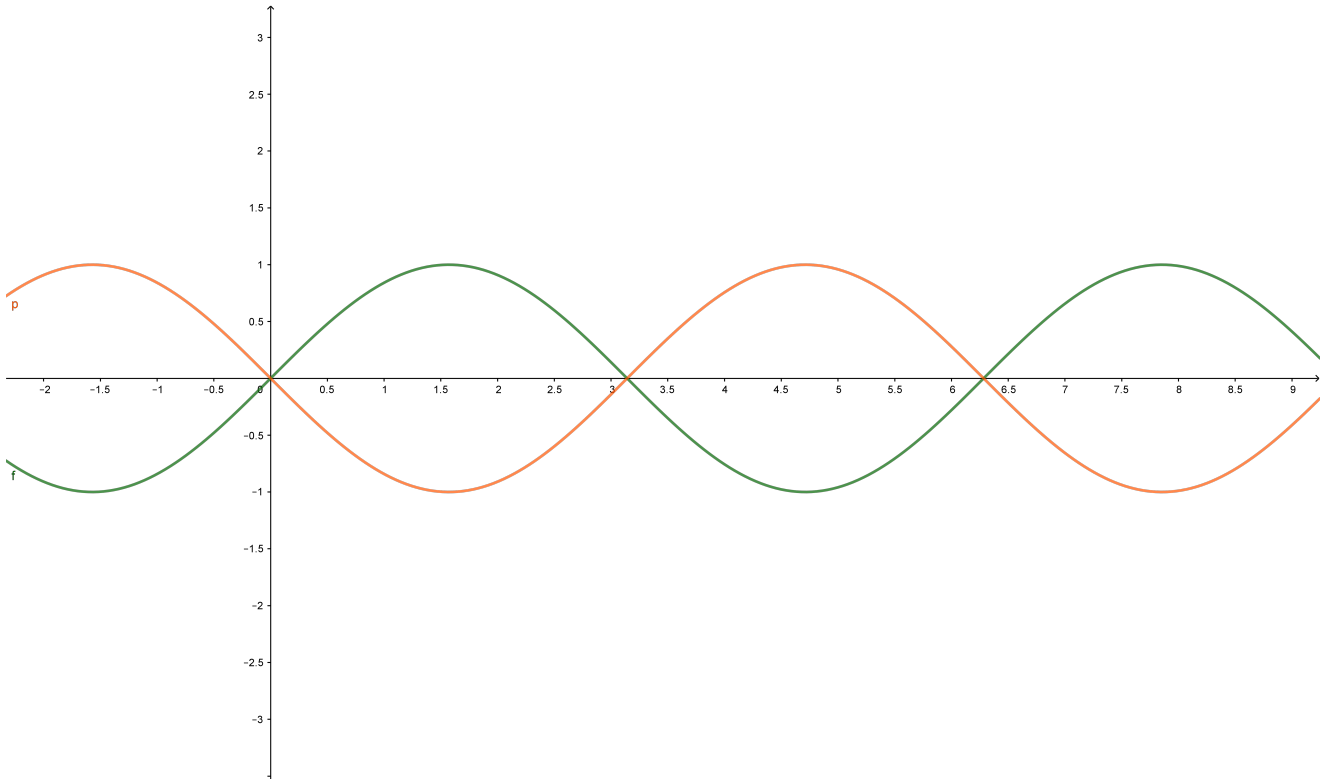
Proposition 5 (Courbe de la dilatée en ordonnée)**.**

La courbe de $\lambda \cdot f$ est déduite de celle de f en multipliant, à abscisse fixé, les ordonnées par λ.

✍ **Exemple 6**
Les courbes suivantes représentent les fonctions sin, $x \mapsto 2\sin(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x)$:



✍ **Exemple 7**
Les courbes suivantes représentent les fonctions sin et $x \mapsto -\sin(x)$:



✎ **Exercice 6**
On note f la fonction cosinus. Tracer les courbes représentatives de $2 \cdot f$ et de $\frac{1}{2} \cdot f$ et $(-2) \cdot f$

Définition 8.

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à 0 si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

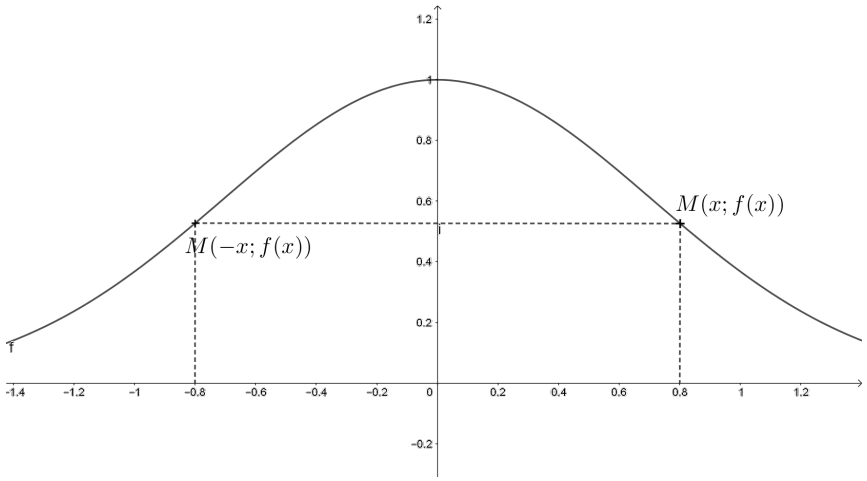
$$x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Définition 9 (Fonction paire)**.**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0. On dit que f est **paire** si

.....

✍ **Exemple 8**
La fonction cosinus, la fonction carré, la fonction valeur absolue.



Remarque :
Dans un repère orthogonal, cela implique la symétrie que la courbe par rapport à l'axe des ordonnées :

$$\forall (x; y) \in D \times \mathbb{R}, \quad (x; y) \in C_f \Leftrightarrow (-x; y) \in C_f$$

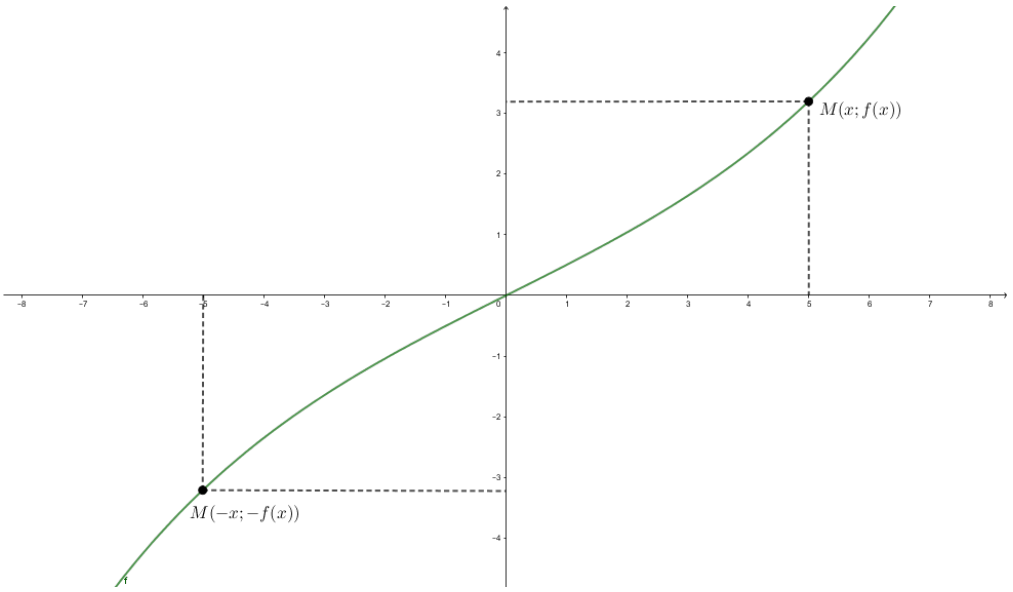
Remarque :
Si une fonction est paire alors il suffit d'étudier la fonction sur $\mathcal{D}_f \cap [0; +\infty[$ pour en déduire le comportement de f sur $\mathcal{D}_f$

Définition 10 (Fonction impaire)**.**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0. On dit que f est **impaire** si

.....

✍ **Exemple 9**
La fonction sinus, la fonction tangente, la fonction cube.



Remarque :
Dans un repère quelconque, cela implique la symétrie que la courbe par rapport à l'origine :

$$\forall (x;y) \in D \times \mathbb{R}, \quad (x;y) \in C_f \Leftrightarrow (-x;-y) \in C_f$$

Remarque :
Si une fonction est impaire alors il suffit d'étudier la fonction sur $\mathcal{D}_f \cap [0;+\infty[$ pour en déduire le comportement de f sur $\mathcal{D}_f$

Définition 11 (Fonction périodique/période)**.**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est **T-périodique** si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x)$$

On appelle alors **période** de f le plus petit réel strictement positif T tel que f est T-périodique.

✍ **Exemple 10**
La fonction sin est ...-périodique, la fonction cos est ...-périodique et la fonction tan est ...-périodique.

Proposition 6 (Courbe représentative d'une fonction périodique)**.**

Si f est T-périodique, alors la courbe représentative de $x \mapsto f(x+T)$ est confondue avec celle de f.

Remarque :
Si une fonction est prériodique alors il suffit d'étudier la fonction sur une période pour en déduire le comportement de f sur $\mathcal{D}_f$

✍ **Exemple 11**
Etudier la périodicité de $x \mapsto \sin^2(x) + \cos(x)$

Proposition 7 (Période de la dilatée en abscisses d'une fonction périodique)**.**

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique alors $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$ est $\frac{T}{\lambda}$-périodique.

✎ **Exercice 7**
Soit ω un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$ est-elle périodique ?

II Etude d'une fonction

Méthode 1 (Plan d'étude d'une fonction).

1. Trouver l'ensemble de définition de la fonction
2. Trouver les symétries éventuelles pour réduire l'étude à un intervalle plus petit
3. Justifier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée en laissant l'expression la plus factorisée possible
4. Faire un tableau de signe de la dérivée et en déduire la tableau de variations de la fonction
5. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition pour compléter le tableau de variations
6. Calculer l'équation de certaines tangentes (horizontales et éventuellement d'autres), trouver les asymptotes en les valeurs interdites, en l'infini
7. Tracer la courbe représentative le plus précisément possible à l'aide de points de coordonnées $(x; f(x))$ pour un certain nombre de valeurs de x et de tangentes.

✎ **Exercice 8**
Etudier la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

✎ **Exercice 9**
Etudier la fonction définie par $f(x) = \frac{4x+1}{e^x}$

✎ **Exercice 10**
Etudier la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-6x-7}{2x+4}$

Méthode 2 (Montrer une inégalité à l'aide d'une étude de fonction).

Pour démontrer une inégalité on peut se ramener à une inégalité avec un des deux membres égal à zéro puis faire une étude de fonction.

✎ **Exercice 11**
A l'aide d'une étude de fonction, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$

✎ **Exercice 12**
A l'aide d'une étude de fonction, montrer que : $\forall x > 0, \ln(1 + x) \leq x$

III Fonctions usuelles

III.1 La fonction logarithme népérien

Définition 12 (Logarithme népérien).

La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

1. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
2. $\ln(1) = 0$

III.2 Propriétés

Proposition 8 (Propriétés algébriques du ln).

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

✎ **Exercice 13**
En écrivant, pour $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx$, démontrer la proposition précédente

✎ **Exercice 14**
Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(x^3 + 1) - \ln(x + 1)$

✎ **Exercice 15**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Proposition 9 (Variations).

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Proposition 10 (Cas d'égalité).

Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

✎ **Exercice 16**
Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1)$
2. $\ln(x) = \ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right)$
3. $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 4$
4. $2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1 - x) = 2\ln(x)$
5. $\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) = \ln(x + 2)$
6. $\ln^4(x) - \ln^2(x) - 1 = 0$

Proposition 11 (Limites importantes).

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

✎ **Exercice 17**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x\ln(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$

III.3 La fonction exponentielle

Définition 13 (Fonction exponentielle).

Pour tout réel x, l'équation en t, $\ln(t) = x$ admet une unique solution notée $\exp(x)$. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $\exp(x)$ est appelée fonction exponentielle.

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Remarque :
Pour ceux qui connaissant le théorème de la bijection :
La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle exponentielle sa bijection réciproque.

Proposition 12 (Dérivée).

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Proposition 13 (Signe).

Pour tout réel x,

$$\exp(x) > 0$$

Proposition 14 (Variations).

La fonction exp est strictement croisssante sur $\mathbb{R}$

✎ **Exercice 18**
En déterminant plusieurs valeurs de la fonction exponentielle ainsi que les pentes des tangentes correspondante, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Proposition 15 (Exponentielle d'une somme).

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

✎ **Exercice 19**
A l'aide de la définition de la fonction exp, démontrer la proposition précédente.

Notation.

On note e la solution de l'équation $\ln(t) = 1$. Ainsi $\exp(1) = e$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = e^n$.
Notation : $\exp(x) = e^x$

Remarque :
$\ln(1) = 0$ donc $e^0 = 1$

Conséquence :

Proposition 16 (Propriétés algébriques de l'exponentielle).

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

et

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

✎ **Exercice 20**
Simplifier les expressions suivantes :

1. $A(x) = \dfrac{(e^x)^5 e^{-2x}}{e^{x+1}}$
2. $B(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
3. $C(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
4. $D(x) = \dfrac{e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

Proposition 17 (Cas d'égalité).

Pour tous réels a et b,

$$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$$

✎ **Exercice 21**
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-2x} = \frac{1}{2}$
2. $e^x = e^{x^2-2}$
3. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 2$
5. $e^x = 4e^{2x}$
6. $e^x - e^{-x} = 2$

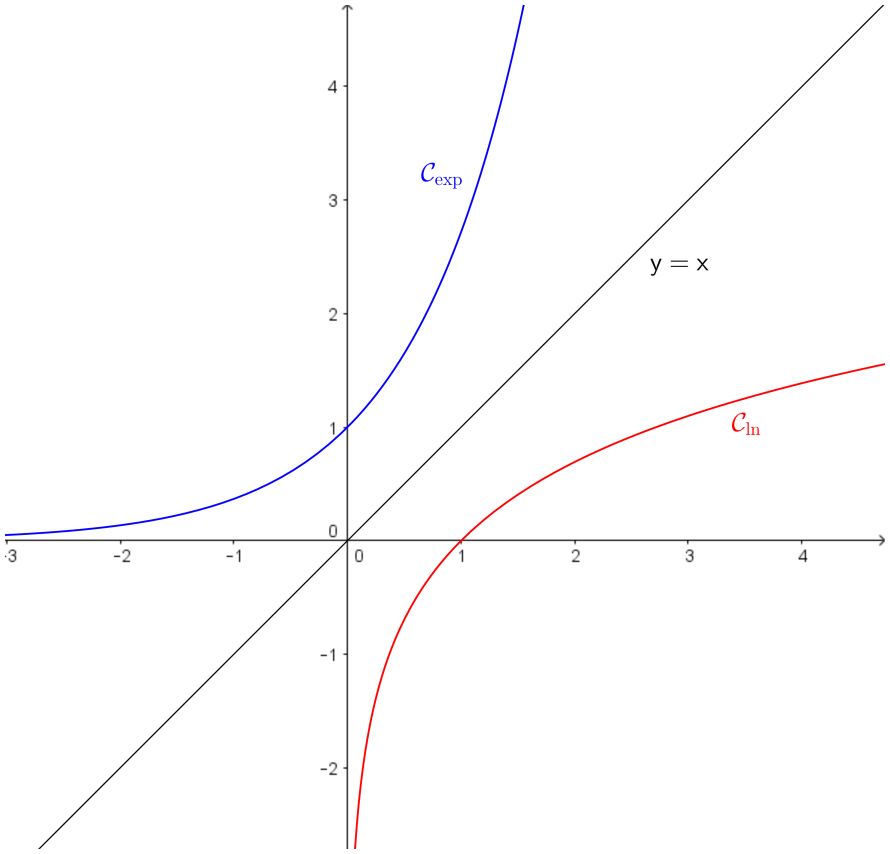
Proposition 18 (Limites importantes).

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

✎ **Exercice 22**
Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble de définition ainsi que les limites aux bornes.

1. $x \mapsto 3xe^{-x}$
2. $x \mapsto \frac{e^x-2}{e^x+1}$
3. $x \mapsto \frac{x-5}{e^x-1}$
4. $x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}$
5. $x \mapsto (x+1)e^x$
6. $x \mapsto (x-2)e^{-x+2}$
7. $x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{x}$
8. $x \mapsto x\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$



III.4 Les fonctions puissances

Définition 14 (Puissance non entière).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir x^α par la formule

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Définition 15 (Ensemble de définition).

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ sur $]0;+\infty[$.

Proposition 19 (Propriétés algébriques).

Pour tous réels α et β et tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a :

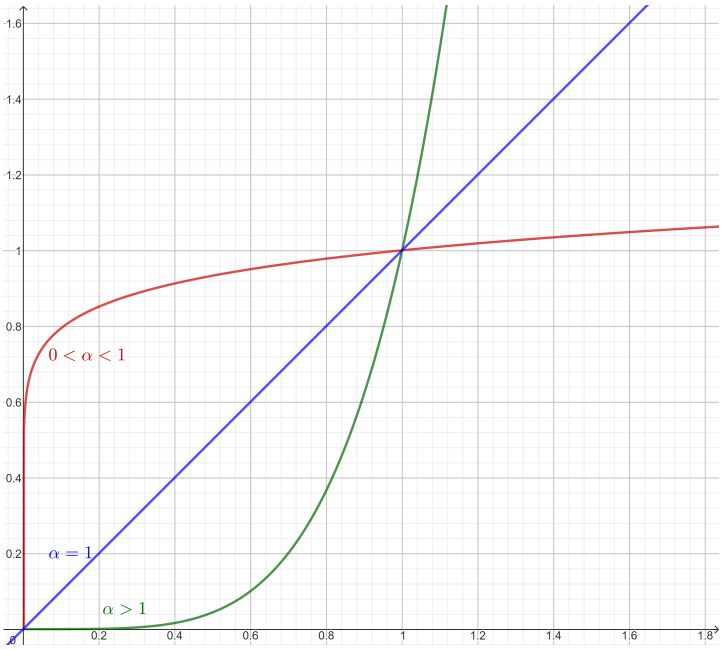
1. $1^\alpha = 1$
2. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
3. $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
5. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
7. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

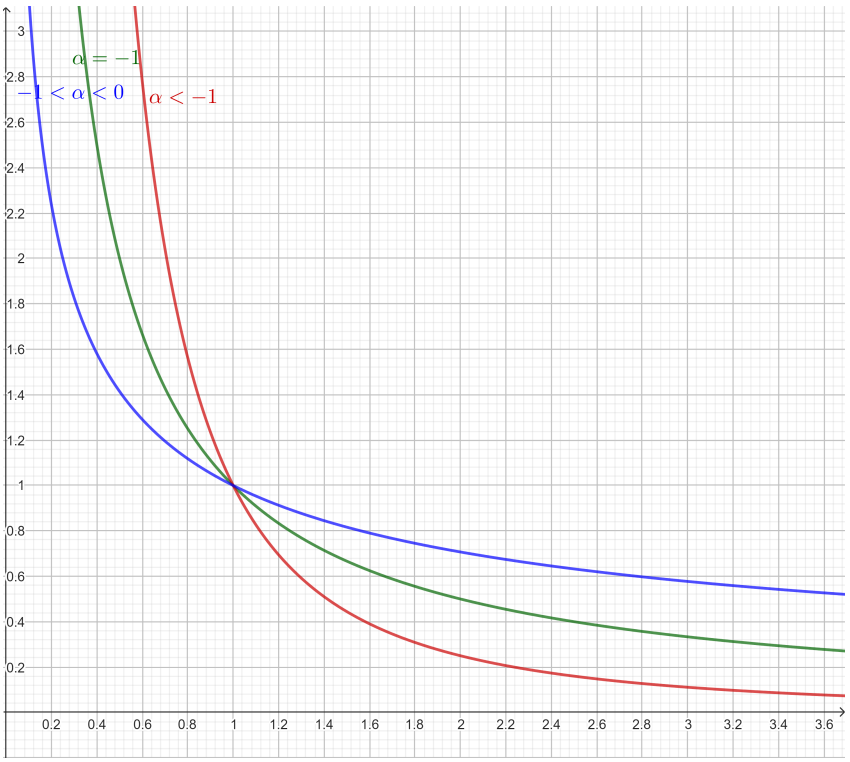
Proposition 20 (Dérivée).

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Remarque :
Le sens de variation de f_α sur $]0;+\infty[$ dépend donc du signe de α.





Proposition 21 (Croissances comparées).

Pour tous $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

Proposition 22 (Fonctions réciproques).

Soit $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On a

$$(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x$$

Définition 16 (Pour $n \in \mathbb{N}^*$, racine n^e d'un nombre réel positif).

Soit $x \in \mathbb{N}^*$.
Si x est un réel positif, la racine n^e de x que l'on note $\sqrt[n]{x}$, ou $x^{\frac{1}{n}}$, est l'unique réel positif y tel $y^n = x$.

✍ **Exemple 12**
La racine carré d'un nombre réel positif x, notée $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.
La racine cubique d'un nombre réel positif x, notée $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{\frac{1}{3}}$ est l'unique réel positif y tel que $y^3 = x$.

✎ **Exercice 23**
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer leur ensemble de définition puis les écrire sous la forme $(u(x))^\alpha$ où u est une fonction à determiner et α un réel à déterminer.

1. $x \mapsto (\sqrt{x})^3$
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^5}$
4. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$
6. $x \mapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$

✎ **Exercice 24**
Déterminer $25^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$

✎ **Exercice 25**
Résoudre les équations suivantes :

$$x^{\frac{2}{3}} = 2$$
$$x^{\frac{3}{4}} = 8$$