Chapitre 10 : Limite de fonctions, continuité

I Limite d'une fonction : Définitions

I.1 Limite en un réel a

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un élément et a désigne un élément de I ou une extremité finie de I. Enfin, f désigne une fonction définie sur $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$.

Définition 1 (Limite finie en un point a).

Soit $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite l en a si :

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x \in \mathcal{D}), (|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

✍ **Exemple 1**
La fonction racine carré admet ... pour limite en 0.

Proposition 1 (Limite en un point de l'ensemble de définition).

Soit a un réel. Si f est définie en a **et** admet une limite en a alors on a nécessairement

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(on dira que f est continue en a)

Proposition 2 (Unicité de la limite).

Si f admet une limite en a alors cette limite est **unique**.

Remarque :
Si $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a |f| = |l|$.

Définition 2 (Limite infinie en un point a).

On dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si :

$$(\forall A > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x \in \mathcal{D}), (|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A)$$

resp.

$$(\forall A < 0), (\exists \delta > 0), (\forall x \in \mathcal{D}), (|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A)$$

✍ **Exemple 2**
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ tend vers $-\infty$ en 0

✎ **Exercice 1**
Montrer « à la main » que $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$

Définition 3 (Limite à droite en a, limite à gauche en a).

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet pour limite l **à droite en** a (resp. à gauche en a) si la fonction $f_{|\mathcal{D} \cap]a;+\infty[}$ (resp. à $f_{|\mathcal{D} \cap]-\infty;a[}$) admet pour l limite en a.

✍ **Exemple 3**
La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet ni de limite à droite ni de limite à gauche en 0.

Notations :
On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ pour la limite à gauche et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ pour la limite à droite.

✍ **Exemple 4**
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \ldots\ldots.$
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots.$
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \lfloor x\rfloor = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x\rfloor = \ldots\ldots$
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \ldots\ldots$

Proposition 3 (CNS d'existence d'une limite)**.**

1. Si f n'est pas définie en a, f admet une limite en a si et seulement si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$
2. Si f est définie en a, f admet pour limite l en a si et seulement si
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

✍ **Exemple 5**
La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \textbf{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$ admet une limite à droite et à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0

✍ **Exemple 6**
Montrer que la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$ admet une limite en 0 :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

I.2 Limite en $\pm\infty$

Définition 4 (Limite finie en l'infini)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré I et soit $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ si :
$$(\forall \epsilon > 0), (\exists M > 0), (\forall x \in I), (x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Remarque :
L'unicité de la limite est aussi vraie en $\pm\infty$

✍ **Exemple 7**
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$

Définition 5 (Limite infini en l'infini)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré I. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :
$$(\forall A \in \mathbb{R}), (\exists M \in \mathbb{R}), (\forall x \in I), (x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A)$$

Définition 6.

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

✍ **Exemple 8**
Completer :

Définition 7.

On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

Définition 8.

On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

I.3 Unification des définition grâce aux voisinages

Définition 9 (Voisinage de a).

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle voisinage de a tout intervalle de la forme :

- $[a-\delta; a+\delta]$ avec $\delta > 0$ si $a \in \mathbb{R}$.
- $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$.
- $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

Définition 10 (limite l en a où a et l appartiennent à $\overline{\mathbb{R}}$).

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.
On dit que f admet pour limite l en a si pour tout voisinage de U de l il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

I.4 Limites et opérations

Les tableaux suivant donnent la limite d'une somme, d'un produit et de l'inverse. Ces règles s'appliquent aussi aux limites à droites et limites à gauches.

Proposition 4 (Limite d'une somme).

Soient f et g deux fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La limite de $f+g$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Proposition 5 (Limite d'un produit).

Soient f et g deux fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La limite de fg est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim\limits_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	∞	∞
$\lim\limits_a (f \times g)$	ll'	∞	?	∞

Proposition 6 (Limite de l'inverse).

Soient f une fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et ne s'annulant pas. La limite de $\frac{1}{f}$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim\limits_a f$	$l \in \mathbb{R}^*$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_a \dfrac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Proposition 7 (Changement de variable).

Soient $h : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $h(I) \subset J$. Soient a un élément de I ou éventuellement une extremité finie ou infinie de I et b un élément de J ou éventuellement une extremité finie ou infinie de J. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

$$\lim_{x \to a} h(x) = b$$

et

$$\lim_{y \to b} g(y) = l$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(h(x)) = l$$

Méthode 1 (Changement de variable).

Si $h(x) \underset{x \to a}{\to} b$, alors

$$\lim_{x \to a} g(h(x)) = \lim_{y \to b} g(y)$$

✍ **Exemple 9**

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ admet pour limite ... en 0, pour limite ... en $+\infty$ et pour limite ... en $-\infty$

✎ **Exercice 2**
Déterminer, après avoir justifié leur existence,

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}\right)$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}\right)$$

I.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 8 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.**

Soient f une fonction définie sur I, et a un élément de I ou éventuellement une extremité finie ou infinie de I et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors

$$\boxed{f \text{ admet pour limite } l \text{ en } a}$$

si et seulement si

$$\boxed{\text{pour tout suite } u \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ on a } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l}$$

Méthode 2 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a)**.**

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a il suffit de trouver deux suites u et v qui admettent la même limite a mais telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ possèdent deux limites différentes.

✍ **Exemple 10**
Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$

✎ **Exercice 3**
Montrer que la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0

I.6 Propriétés des fonctions admettant une limite

Proposition 9 (Limite de la valeur absolue d'une fonction)**.**

Si f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $|f|$ admet pour limite $|l|$.
La réciproque est fausse sauf pour $l = 0$:

$$\lim_a f = 0 \Leftrightarrow \lim_a |f| = |l|$$

Proposition 10.

Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque :
La réciproque est fausse.
Exemple : la fonction cosinus en $+\infty$.

✍ **Exemple 11**
La fonction exponentielle admet 0 pour limite en $-\infty$ donc est bornée **sur un voisinage de** $-\infty$. Elle n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$!

Proposition 11 (Passage à la limite dans une inégalité).

Soit f une fonction admettant une limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \leq M$, alors $l \leq M$.
2. Si pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \geq M$, alors $l \geq M$.
3. Si pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$, et que g admet une limite $l' \in \mathbb{R}$ en a, alors $l \leq l'$.

Remarque :
Même si les inégalités de départ sont strictes, on ne peut pas conclure avec des inégalités strictes.
On a par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ mais $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

I.7 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 1 (Théorème d'encadrement).

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g et h trois fonctions réelles telles que

1. au voisisnage de a,
$$f \leq g \leq h$$
2. f et h admettent une limite commune $l \in \mathbb{R}$ en a.

Alors g admet une limite en a et
$$\lim_a g = l$$
.

✍ **Exemple 12**
Montrer que la fonction suivante admet une limite en $+\infty$:
$$g(x) = \frac{x + \cos(x)}{x + 2}$$

✍ **Exemple 13**
Montrer que la fonction suivante admet une limite en $+\infty$:
$$g(x) = \frac{\cos(x) - 2\sin(x) + 3x}{x - 10}$$

Proposition 12 (Conséquence).

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g deux fonctions réelles telles que

1. au voisisnage de a,
$$|f| \leq g$$
2. $\lim_a g = 0$.

Alors f admet une limite en a et
$$\lim_a f = 0$$
.

✍ **Exemple 14**
Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

✎ **Exercice 4**
Montrer que la fonction suivante admet une limite en 0 :
$$x^2 \cos(\frac{1}{x}) - 3x \cos(\frac{1}{x^2})$$

Théorème 2 (Théorèmes de minoration et majoration)**.**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions telles que, au voisinage de a, $f \leq g$.

1. Si $\lim\limits_a f = +\infty$ alors $\lim\limits_a g = +\infty$
2. Si $\lim\limits_a g = -\infty$ alors $\lim\limits_a f = -\infty$

✍ **Exemple 15**
Montrer que la suite suivante admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$:

$$f(x) = \cos(x) - 3x$$

Proposition 13 (Limites d'une fonction monotone, version croissante)**.**

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors :

1. Si f est majorée alors f possède une limite finie en b et $\lim\limits_b f = \sup\limits_{]a,b[} f$. Sinon $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$
2. Si f est minorée sur I alors possède une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f$. Sinon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Proposition 14 (Limites d'une fonction monotone, version décroissante)**.**

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Si f est décroissante, alors :

1. Si f est minorée alors possède une limite finie en b et $\lim\limits_b f = \inf\limits_{]a,b[} f$. Sinon $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.
2. Si f est majorée alors f possède une limite finie en a et $\lim\limits_a f = \sup\limits_{]a,b[} f$. Sinon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

✍ **Exemple 16**
La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle possède des limites finies à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$

Remarque :
L'intervalle doit absolument être ouvert. Par exemple, la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $[0,1]$ mais n'admet pas de limite en 1.
La condition de majoration est nécessaire pour avoir la finitude de la limite : la fonction inverse est décroissante sur $]0;3[$ mais n'admet pas de limite finie en 0.
La fonction doit absolument être monotone. Par exemple la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0.

✍ **Exemple 17**
Si f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante. Elle admet donc une limite en $+\infty$, finie ou infinie selon que F est majorée ou non.

Proposition 15 (Produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0)**.**

Si $f = g \times \epsilon$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et g une fonction bornée alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

II Continuité en un point

II.1 Définition et critères de continuité

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction **définie sur un intervalle I et a un élément de I.**

Définition 11 (Continuité en un point)**.**

On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a (nécessairement égale à $f(a)$)

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction est continue en a)**.**

Pour montrer que f est continue en a on peut montrer que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$$

✍ **Exemple 18**
Montrer que la fonction suivante est continue en 2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ 1 \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Proposition 16 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.**

Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et en a. Alors f est continue en a si et seulement si pour tout suite u de limite a on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$

Méthode 4 (Montrer qu'une fonction n'est pas continue en a)**.**

Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en a on peut :

- Montrer que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) \neq f(a)$$

ou

- Trouver une suite u vérifiant $u_n \to a$ telle que

$$\lim f(u_n) \neq f(a)$$

ou

- Trouver deux suites u et v qui tendent vers a et telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ admettent des limites différentes.

✍ **Exemple 19**

La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. Elle s'appelle la fonction de Dirichlet.

Définition 12 (Fonction continue à droite, à gauche).

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.
On dit que f est **continue à droite en** a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

On dit que f est **continue à gauche en** a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

Proposition 17 (CNS de continuité).

Soit f une fonction définie au voisinage de a et en a. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite **et** à gauche en a.

II.2 Prolongement par continuité

Définition 13 (Prolongement par continuité).

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie en a. Le prolongement $\tilde{f}$ obtenu en posant $\tilde{f}(a) = \lim_a f$ est alors continu en a.

✍ **Exemple 20**
Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en 0 et donner leur prolongement. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, $g : x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1}$, $h : x \mapsto x\ln(x)$

II.3 Continuité sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$.

Définition 14 (Continuité sur un intervalle).

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

✍ **Exemple 21**
La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions trigonométriques sont continues sur les différents intervalles de leur ensemble de définition.

Remarque :
Graphiquement, cela signifie qu'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon.

Proposition 18 (Continuité sur un intervalle et opérations).

La somme et le produit de deux fonctions continues sur I sont continues sur I. L'inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur I est continue sur I, le quotient d'une fonction continue sur I par une fonction ne s'annnulant pas sur I est continue sur I.

Remarque :
Toute combiniaison linéaire de deux fonctions continues sur I est continue sur I. On dit que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

✍ **Exemple 22**
Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions homographiques $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

✎ **Exercice 5**
On admet que si f est continue sur I alors $|f|$ l'est aussi. En déduire que si f est g sont deux fonctions continues sur I alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.

✎ **Exercice 6**
Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^3 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 19 (Continuité de la composée de deux fonctions continues)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

✍ **Exemple 23**
La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^4)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto 1 + x^4$ continue sur $\mathbb{R}$ (car polynômiale) et à valeurs dans $[1; +\infty[\subset]0; +\infty[$ et de la fonction ln continue sur $]0; +\infty[$.

✎ **Exercice 7**
Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x^2) \text{ si } x \geq 0 \\ -(4x)^3 \text{ sinon} \end{cases}$$

Méthode 5 (Montrer la continuité d'une fonction sur un intervalle)**.**

Pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle on ne revient pas souvent à la définition avec les epsilon, on utilise souvent les propriétés précédentes.

✎ **Exercice 8**
Montrer que la fonction f suivante est continue sur $\mathbb{R}$. On pourra montrer grâce aux théorèmes généraux qu'elle est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ puis montrer « à la main »qu'elle est continue en 0.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \neq 0, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

III Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

III.1 Le théorème

Théorème 3 (TVI)**.**

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque :
Le réel c est en général non unique !!

Remarque :
On a en particulier :
Si f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors f s'annule sur $[a; b]$.

✎ **Exercice 9**
Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f admet un point fixe.

Proposition 20 (Image d'un intervalle par une fonction continue)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. L'image $f(I)$ est un intervalle.

✎ **Exercice 10**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on en déduire quant à $f(\mathbb{R})$?
3. Grâce à un tableau de variations, déterminer explicitement $f(\mathbb{R})$

Question : quelle condition pour garantir l'unicité ?

III.2 Continuité et bijectivité

Théorème 4 (Théorème de la bijection)**.**

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un **intervalle** I. Alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Sa fonction réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que la fonction f.

Proposition 21.

I	$f(I)$ f str. croissante sur I	$f(I)$ f str. décroissante sur I
$[a, b]$	....	....
$[a, b[$	....	....
$]a, b]$	....	....
$]a, b[$	....	....

Méthode 6 (Rédaction).

Quatre points sont attendus :

1. La fonction f est **continue** sur l'**intervalle** I
2. La fonction f est **strictement ...** sur I
3. De plus $f(a) = \dots$ (ou $\lim_{x\to a} = ...$) et $f(b) = \dots$ (ou $\lim_{x\to b} = ...$)
4. D'après le **théorème de la bijection**, f réalise une bijection de I sur $f(I) = ...$

✍ **Exemple 24**
La fonction $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

1. La fonction f est continue sur $]-1;1[$
2. La fonction f est strictement décroissante sur $]-1;1[$
3. $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$
4. D'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$

Remarque :
La continuité de la réciproque peut être mise en défaut si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle.
Exemple $f : [0;1[\cup[2;3[\to [0;2[$ qui à x associe x si $x < 1$ et $x-1$ si $x \geq 2$ est une bijection continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition mais sa réciproque n'est pas continue en 1.

IV Fonctions continues sur un segment

Définition 15.

On appelle segment un **intervalle fermé borné**.

Théorème 5 (Théorème des bornes atteintes).

Si f est une fonction continue sur un **segment** $[a,b]$, $((a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b)$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque :
Il est crucial que l'intervalle soit un segment. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ mais n'atteint pas sa borne inférieure.

✎ **Exercice 11**
Montrer sans étude des variations que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}+$

Proposition 22 (Conséquence : image d'un segment par une application continue).

L'image d'un segment par une application continue est un segment.

✎ **Exercice 12**
Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\inf_{[a,b]} f(x) > 0$. Le résultat est-il vrai pour une fonction continue sur un intervalle I quelconque ?

✎ **Exercice 13**
Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}+$.

✎ **Exercice 14** *Application*
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive. Alors il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in [a,b], f(x) \geq c$.