Chapitre 3 : Nombres réels

Table des matières

I L'ensemble des nombres réels

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels. Cet ensemble est muni de deux lois de composition interne : l'addition et la multiplication vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition 1.

1. **Commutativité** : Pour tous réels a et b on a : $a+b=b+a$ et $ab=ba$
2. **Associativité** : Pour tous réels a, b et c, on a : $a+(b+c)=(a+b)+c$ et $a(bc)=(ab)c$
3. **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition** : pour tous réels a, b et c, on a : $a(b+c)=ab+ac$ et $(a+b)c=ac+bc$

Définition 1 (Relation d'ordre)**.**

Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. **Reflexivité** : Pour tout $x\in E$, $x\mathcal{R}x$
2. **Antisymétrie** : Pour tous $x\in E$, $y\in E$, si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) alors $x=y$
3. **Transitivité** : Pour tous $x\in E$, $y\in E$ et $z\in E$, si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) alors $x\mathcal{R}z$

Proposition 2 (Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$)**.**

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** $\leq$.

Remarque :
Cette relation d'ordre est **totale** : pour tous réels $x,y\in\mathbb{R}$, $x\leq y$ ou $y\leq x$.

Proposition 3 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations + et ×).

Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

1. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
2. $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$
3. $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} ab \leq ac \text{ si } c \geq 0 \\ ab \geq ac \text{ si } c \leq 0 \end{cases}$
4. $(0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d) \Rightarrow ac \leq bd$

Proposition 4 (Décroissance de la fonction inverse sur chacun des intervalles de son ensemble de définiti

Soit a et b deux réels.

1. Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$
2. Si $a \leq b < 0$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} < 0$

Remarque :
Si $a < 0 < b$ alors on ne peut pas utiliser la décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais on peut affirmer que $\frac{1}{a} < 0$ et $\frac{1}{b} > 0$ donc que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

✍ **Exemple 1**
Soit $x, y \in [0, 1[$. Montrer que

$$x \leq y \Rightarrow \frac{x}{1-x} \leq \frac{y}{1-y}$$

✎ **Exercice 1**
Soit $x \in [0; 5]$. Donner un encadrement de $\frac{x+5}{20-2x}$ par deux constantes réelles.

Méthode 1.

Pour majorer une fraction de nombres positifs, il faut majorer son numérateur et minorer son dénominateur

✍ **Exemple 2**
Soit $x \in [2, 3]$ et $y \in [5; 10]$. Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$.

✎ **Exercice 2**
Soit $x \in [-3, -2]$ et $y \in [5; 10]$. Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$.

rajouter x$\in [-3, 2] ety \in [5; 10]$????

✍ **Exemple 3**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x-1}{x+3} \leq 2$$

✎ **Exercice 3**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$e^{3x}(e^{-2x} - 5) \leq 0$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$\frac{\ln(x)}{2-x} < 0$$
On prendra soin de déterminer l'ensemble de résolution de cette équation.

Définition 2 (Intervalle)**.**

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On a :
On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $(a, b) \in I^2$ vérifiant $a < b$, on a $[a, b] \subset I$.

✍ **Exemple 4**
$\mathbb{R}+$ et $[-2, 3[$ sont des intervalles, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

✎ **Exercice 4**
Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?
1. $]-2;3[\cup]4;10[$
2. $]-2;3[\cup]2;10[$
3. $]-2;3[\cap]4;10[$
4. $]-2;3[\cap]2;10[$

II Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 3 (Valeur absolue)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre :
$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 5 (Définition équivalente)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$|x| = \max\{-x, x\}$$

Proposition 6 (Récine carrée du carré).

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Remarque :
La valeur absolue d'un nombre représente sa distance à 0. Si a et x sont deux nombres réels, $|x-a|$ représente la distance entre a et x. Si b est un nombre réel positif, l'inégalité $|x-a| \leq b$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à b.

Proposition 7 (Résolution d'équation ou inéquation).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}+$

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$

✍ **Exemple 5**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-3| = 4$
2. $|-3x+5| \leq 2$
3. $|-3x+5| \geq 7$
4. $|x^2+5x| < 3$

✎ **Exercice 5** 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   (a) $|x^2 - x| = 4$
   (b) $|x+5| \leq 1$
   (c) $|4x+3| \geq 2$
   (d) $|x-3| = |2x+2|$

2. Soit x et y tels que $|x-2| \leq 1$ et $y \in]-5;-4[$. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$

Remarque :
Résoudre $|2x+5| = 3x+2$

Méthode 2.

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = g(x)$ on peut raisonner par analyse-synthèse.

Méthode 3.

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = g(x)$ on peut raisonner par disjonction des cas :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ et } f(x) = g(x) \\ \text{ ou} \\ f(x) < 0 \text{ et } -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Méthode 4.

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = g(x)$ on peut raisonner par équivalence sans oublier la condition $g(x) > 0$:
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \text{ ou } -f(x) = g(x) \end{cases}$$

✍ **Exemple 6**
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $|x-3| = 2x+1$
2. $x-3 = |2x+1|$
3. $x^2-1 = |2x+2|$
4. $|2x-1| \leq \frac{1}{x}$

✎ **Exercice 6**
Résoudre $|x-4| = 2x+5$

✍ **Exemple 7**
Résoudre $|2x-1| = |3x+2|$

✎ **Exercice 7**
Résoudre $|2x^2+3x-1| = |x^2-3x+2|$

Proposition 8 (Valeurs absolue d'un produit et d'un quotient).

... rajouter ...

Proposition 9 (Inégalité triangulaire).

Pour tous réels a et b,

$$||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

avec égalité à droite ssi a et b sont de même signe.

Remarque :

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels $x_1, \dots x_n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

✍ **Exemple 8**

Majorer la valeur absolue de la fonction suivante : $x \mapsto 2\sin(x^2) - 3\cos(2x) + \sin^2(e^x)$

✎ **Exercice 8**

Soit $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(kx)}{n^2 k}\right| \leq \dfrac{x}{n}$

✍ **Exemple 9**

Montrer que pour tous réels x et y, on a :

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$
2. $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$ *Astuce : Pour tout* $(X;Y) \in \mathbb{R}^2; (1+X)(1+Y) = 1+X+Y+XY$

✎ **Exercice 9**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$. Montrer que pour tous réels x et y, $A(x+y) \leq A(x) + A(y)$.
Astuce : montrer que $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}+$ *et utiliser l'inégalité triangulaire.*

III Majorant, maximum, borne supérieure

Définition 4 (Majorant)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.
On dit que M est un **majorant** de A si

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

On dit que A est **majorée** si elle admet un majorant.

✍ **Exemple 10**

La partie $]-\infty;2]$ est majorée mais $[2;+\infty[$ ne l'est pas.

✎ **Exercice 10**

Donner un majorant de $]-\infty;3[$.

Remarque :

Si une partie est majorée alors elle possède une infinité de majorants.

Définition 5 (Minorant).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.
On dit que m est un **minorant** de A si

$$\forall x \in A, \quad x \geq m$$

On dit que A est **minorée** si elle admet un minorant.

✍ **Exemple 11**
2 est un minorant de $[2;+\infty[$, 1 est un minorant de $[2;+\infty[$. $\mathbb{R}$ n'est pas minoré, $\mathbb{R}+$ est minoré.
Les parties $]-\infty;1]$ et $]-\infty;1[$ sont majorées mais non minorées.

✎ **Exercice 11**
Donner un minorant de $\{x^2; x \in \mathbb{R}\}$

Définition 6 (Partie bornée).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

✍ **Exemple 12**
$[-2;3]$ est bornée, $]-2;15]$ est borné, $]-\infty;3]$ n'est pas bornée.

✎ **Exercice 12**
Dire si les ensembles suivants sont bornés :

1. $\{\sin(x); x \in \mathbb{R}\}$
2. $\{\cos(x)+x; x \in \mathbb{R}\}$
3. $]-\infty;2] \cup [-2;3]$
4. $]-\infty;2] \cap [-2;3]$

Proposition 10 (CNS pour être bornée).

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. A est bornée si et seulement si il existe $C>0$, tel que

$$\forall x \in A, \quad |x| \leq C$$

.

✍ **Exemple 13**
Montrer que l'ensemble $\{\sin(x) - 3\sin(2x) + 4\cos(x) + e^{-x^2}; x \in \mathbb{R}\}$ est borné.

✎ **Exercice 13**
Montrer que l'ensemble $\{\frac{1}{n} - \sin(e^n) + 4e^{-n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné.

Définition 7 (Maximum).

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.
On dit que M est un **maximum** de A si M est un majorant de A qui **appartient à** A.

Remarque :
Si un tel élément existe, il est unique donc on dit que M est **le** maximum de A.
On le note $\max(A)$.

Définition 8 (Minimum).

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.
On dit que m est un **minimum** de A si m est un majorant de A qui **appartient à** A.

Remarque :
Si un tel élément existe, il est unique donc on dit que m est **le** minimum de A.
On le note $\min(A)$.

✍ **Exemple 14**
2 est le maximum de $]-\infty; 2]$.
$]-\infty; 1]$ admet un maximum (le réel 1) mais $]-\infty; 1[$ n'admet pas de maximum.
$]1; 2]$ admet un maximum mais pas de minimum.

✎ **Exercice 14**
Dire si les ensembles suivants admettent un maximum, un minimum et donner le cas échéant leurs valeurs.

1. $\{2\sin(2x) - 3\cos(2x); x \in \mathbb{R}\}$
2. $\{x^2; x \in \mathbb{R}\}$
3. $\{\frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $]-\infty; 2] \cup [-2; 3[$
5. $]-\infty; 2] \cap [-2; 3[$

Proposition 11 (Borne supérieure).

Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède un **plus petit majorant**. Ce plus petit majorant est appelé **borne supérieure** et noté $\sup(A)$.

Remarque :
La borne supérieure d'une ensemble, si elle existe, est unique.

Remarque :
$\sup(A)$ n'est pas forcément un élément de A, à la différence de $\max(A)$ qui, s'il existe, est forcément un élément de A.

Remarque :
Si le maximum de A existe alors $\sup(A) = \max(A)$.

Remarque :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ majorant de } A : \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \text{tout majorant de } A \text{ est supérieur à } \alpha \end{cases}$$

✍ **Exemple 15**
1 est la borne supérieure de $]-\infty;1[$

✎ **Exercice 15**
Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure ?
$\mathbb{R}^*$, $]-\infty;1]$

Proposition 12 (Borne inférieure)**.**

Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède un **plus grand minorant**. Ce plus grand minorant est appelé **borne inférieure** et noté $\inf(A)$.

✍ **Exemple 16**
L'ensemble suivant admet-il une borne supérieure ? une borne inférieure ?

$$A = \left\{\frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

✎ **Exercice 16**
L'ensemble suivant admet-il une borne supérieure ? une borne inférieure ?

$$B = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

✍ **Exemple 17**
Déterminer si les ensembles suivants sont majorés, minorés, ont un plus grand élément, un plus petit élément, une borne supérieure, une borne inférieure. $]-10,4]$, $]-10,+\infty[$, $]-\infty,4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $[-2;2]$, $]-2;2[$, $]-20;-15[\cup]-10,+\infty[$, $]-20;15[\cap]-10,+\infty[$

✎ **Exercice 17**
Déterminer, s'ils existent, la bornée inférieure, la borne supérieure, le maximum et le maximum des ensembles suivants ;

1. $A = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{\frac{x}{x+1}, x \in]0;1]\}$

IV Partie entière d'un nombre réel

Proposition 13 (Axiome d'existence d'un maximum)**.**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.

Définition 9 (Partie entière d'un nombre réel)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On appelle **partie entière de** x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$, le maximum de l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$$

Proposition 14 (Caractérisation de la partie entière)**.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Remarque : *Conséquence*
Soient a et b deux réels. Si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ alors $|b - a| < 1$

✍ **Exemple 18**
Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

✎ **Exercice 18**

1. Donner les valeurs de $\lfloor 1,25 \rfloor$, $\lfloor 2,9 \rfloor$, $\lfloor -1,25 \rfloor$, $\lfloor -2,9 \rfloor$.
2. Représenter $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $[-3, 4]$.
3. Résoudre les équations suivantes :

$$\lfloor x \rfloor = 3, \lfloor x \rfloor = -2, \lfloor 2x \rfloor = 3, \lfloor \frac{x}{5} \rfloor = -1, \lfloor 6x - 2 \rfloor = 4, \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$$

.

4. Résoudre dans R l'équation $\lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor 3x + 1 \rfloor$.