Chapitre 3 : Géométrie du plan

On note $\mathcal{P}$ le plan et $(O;\vec{i},\vec{j})$ le repère orthonormé usuel de $\mathcal{P}$.
On note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan .

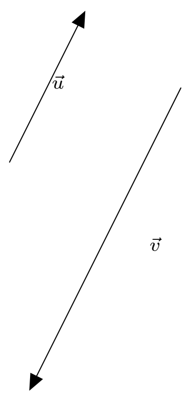
I Modes de repérage dans le plan

I.1 Bases de $\vec{\mathcal{P}}$ et coordonnées de vecteurs

Définition 1.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit **colinéaires** si l'un des deux est nul ou s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Exemple
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci dessous sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$



Définition 2.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une **famille libre**.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires forment une **famille liée** (voir cours d'algèbre linéaire pour les définitions générales de familles libres et liées).

Théorème 1.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**.
Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un **unique** couple $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
On dit que $(\vec{u},\vec{v})$ est une **base** de $\vec{\mathcal{P}}$ et que α et β sont les **coordonnées** (ou composantes) de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u},\vec{v})$.

Remarque :
Une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ étant fixée on peut associer le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2$

Voir animation géogébra.

Exemple
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ la base usuelle (dite canonique) et soient $\vec{u}(2;1)$ et $\vec{v}\,(-1;4)$ deux vecteurs du plan.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$ puis exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ainsi que du vecteur $\vec{w}\,(4;3)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Définition 3.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

1. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base **orthogonale** lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions perpendiculaires.
2. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est **normée** lorsque $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ (et on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires).
3. Une base orthogonale et normée est dite **orthonormée**.
4. Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est dite **directe** lorsque la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à $]0;\pi[$ et **indirecte** lorsque la mesure principale de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ appartient à $]-\pi;0[$.

Remarque :
Si $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\vec{\mathcal{P}}$, la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ ne peut pas être égale à 0 ou à π car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

I.2 Repère cartésien de $\mathcal{P}$

Définition 4.

Un **repère cartésien** est la donnée d'un point du plan (l'origine du repère) et d'une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Pour tout point M du plan, on définit les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ comme étant le couple de réels $(x;y)$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit qu'un repère $(O;\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé lorsque la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormée.

Exemple
Soit $\Omega(1;2)$. Donner les coordonnées de $M(5;5)$ dans le repère $(\Omega;\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis dans l'exemple précédent.

I.3 Coordonnées polaires

Le plan est muni de repère orthonormé usuel $(O, \vec{i}, \vec{j})$

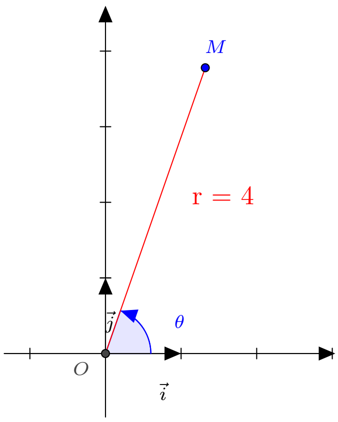
Définition 5.

Soit $M(x;y)$ un point du plan distinct de l'origine. Le vecteur $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ est unitaire donc il exite $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$. En notant $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, on a

$$O\vec{M} = r(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j})$$

Les coordonnées polaires de M sont (r, θ).

Remarque :
Les coordonnées polaires de M sont (r, θ) si et seulement si $z_M = re^{i\theta}$



Voir animation géogébra

Exemple
Le point de coordonnées cartésiennes $(2;0)$ a pour coordonnées polaires $(2;\frac{\pi}{2})$

Exercice 1
Donner les coordonnées polaires des points de coordonnées cartésiennes $(4;4)$, $(-2;-2)$, $(1;\sqrt{3})$ et $(-1;-\sqrt{3})$; $(4;4\sqrt{3})$ et $(-4;-4\sqrt{3})$
Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées polaires suivantes :
$(3;\frac{\pi}{2})$, $(6;-\frac{2\pi}{3})$

II Produit scalaire

II.1 Définition

Définition 6.

On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre réel défini par :
1. Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
2. Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

Exemple

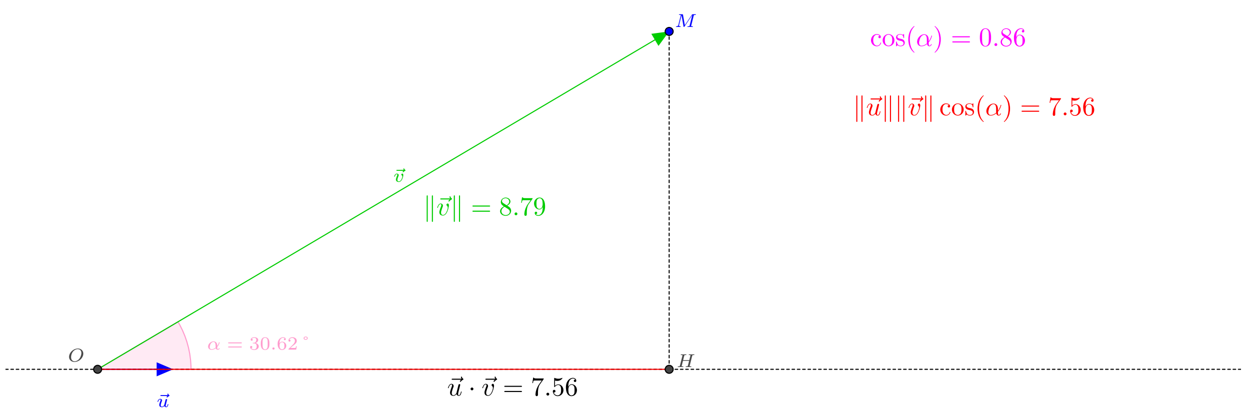


Illustration géogébra.

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

Proposition 1 (CNS d'orthogonalité).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exercice 2
Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée du plan. Déterminer les produits scalaires suivants : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$

Exercice 3
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de norme 2 tels que l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ mesure $\frac{-2\pi}{3}$. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

II.2 Expression à l'aide du projeté orthogonal

Proposition 2.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{ON}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ et que l'on appelle H le projeté orthogonal de M sur la droite (ON), on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} ON \times OH \text{ si } H \in [ON) \\ -ON \times OH \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de norme 1 que vous dessinerez sur votre feuille.
Déterminez graphiquement l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

II.3 Propriétés

Proposition 3.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2$

Proposition 4 (Symétrie).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on a

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Proposition 5 (Bilinéarité).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et tous réels λ, μ, on a

1. Linéarité à gauche : $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$
2. Linéarité à droite : $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w}$

Exemple
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -3$. Calculer le produit scalaire $(2\vec{w} + 8\vec{v}) \cdot \vec{u}$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot (-2\vec{w} + 2\vec{v})$.

Proposition 6 (Positivité)**.**

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$.

Proposition 7 (Non dégénéré)**.**

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$$

II.4 Expression à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

On a

$$\begin{array}{rcl}\vec{u}\cdot\vec{v}&=&(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2)\\&=&x\vec{e}_1\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2)+y\vec{e}_2\cdot(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2)\\&=&xx'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+xy'\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+yx'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+yy'\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1\\&=&xx'+yy'\end{array}$$

Proposition 8.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

Exercice 4
calculer les produits scalaires entre les vecteurs suivants donnés par leur coordonnées dans la base usuelle $(\vec{i},\vec{j})$:
$\vec{u}=(1,1)$ et $\vec{v}=(2,1)$
$\vec{u}=(3,-1)$ et $\vec{v}=(2,\frac{1}{2})$

Exercice 5
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x+3y-9=0$ et $M(3;2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$.

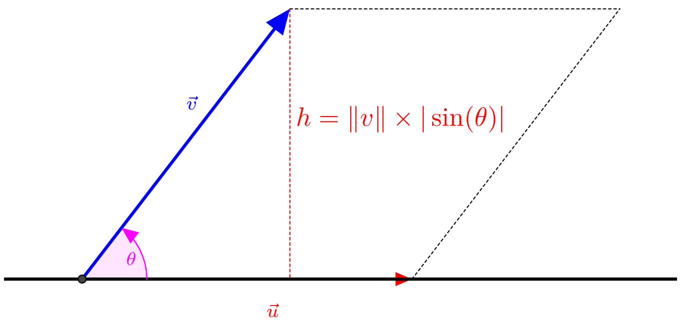
III Déterminant

III.1 Définition

Définition 7.

On appelle **déterminant** du couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ le nombre réel, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ et défini par :

1. Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v})=0$
2. Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$



Proposition 9 (CNS de colinéarité).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Exemple
Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe du plan, alors : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -1$

Remarque :
Une produit scalaire nul nous indique si les vecteurs sont orthogonaux, un déterminant nui nous indique que les vecteurs sont colinéaires.
Le signe du produit scalaire nous indique si l'angle entre les vecteurs est aigu ou obtus, le signe du déterminant nous indique l'orientation de la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Exercice 6
Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe du plan.
Déterminer les déterminants suivants : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$, $\det(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$

III.2 Interprétation géométrique

La valeur absolue du déterminant $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
L'aire d'un triangle ABC est donc $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.
On dit que $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'**aire orientée** du triangle ABC.

III.3 Propriétés

Proposition 10.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

Proposition 11 (Antisymétrie).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$

Proposition 12 (Bilinéarité)**.**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels λ, μ, on a :

1. $\det(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{w}) + \mu\det(\vec{v},\vec{w})$
2. $\det(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u},\vec{v}) + \mu\det(\vec{u},\vec{w})$

Exercice 7
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2$ et $\det(\vec{u},\vec{w}) = -3$. Calculer les déterminants suivants : $\det(2\vec{w}+8\vec{v},\vec{u})$ et $\det(\vec{u},-2\vec{w}+2\vec{v})$.

Proposition 13.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. $(\vec{u},\vec{v})$ est une base directe si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) > 0$
2. $(\vec{u},\vec{v})$ est une base indirecte si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) < 0$

III.4 Expression à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée directe

On travaille dans une base othonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Calculons $\det(\vec{u},\vec{v})$:

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u},\vec{v}) &= \det(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2, x'\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\\
&= x\det(\vec{e}_1, x'\vec{e}_1+y\vec{e}_2) + y\det(\vec{e}_2, x'\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\\
&= xx'\det(\vec{e}_1,\vec{e}_1) + xy'\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + yx'\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + yy'\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\\
&= 0 + xy' - x'y + 0\\
&= xy' - x'y
\end{aligned}$$

Proposition 14.

Soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ une base othonormée directe.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\\
&= xy' - x'y
\end{aligned}$$

Exercice 8
Soient $\vec{u} = (1,3)$ et $v = (-2,3)$, $w = (6,-1)$ Calculer les déterminants suivants : $\det(\vec{u},\vec{u})$, $\det(\vec{u},\vec{v})$, $\det(\vec{w},\vec{u})$, $\det(\vec{u},\vec{w})$

IV Droites du plan

Dans toute cette partie, on donne les coordonnées dans un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$.

IV.1 Equation cartésienne

Proposition 15.

Soient a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite $\mathcal{D}$.
Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.
L'équation $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$.

Remarque :
Toute droite du plan admet une infinité d'équations cartésiennes et deux équations cartésienne représentent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Exemple
Les équations $x^2 - 2x + 1 = 0$ et $4x^2 - 8x + 4 = 0$ représentent la même droite.

Définition 8.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points A et B de d tels que $\vec{u} = \overline{AB}$

Remarque :
Soient $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et A, B deux points de d. Les coordonnées de A vérifient : $ax_A + by_A + c = 0$
Les coordonnées de B vérifient : $ax_B + by_B + c = 0$
On a donc :

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$$

Si on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ on a donc

$$ax + by = 0$$

Proposition 16.

L'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $ax + by = 0$ est une droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs colinéaires.

Proposition 17.

Tout vecteur **non nul** de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

IV.2 Méthodes pour déterminer une équation cartésienne de droite

Droite donnée par un point et un vecteur directeur :

Méthode 1.

Soit$\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 9

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de chacune des droites données par les équations suivantes : $y = 2x + 1$, $x + y + 1 = 0$, $x = 2$, $y = \frac{1}{2}x - 5$

Droite passant par deux points distincts A et B :

Proposition 18.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par deux points distincts A et B.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow A, B \text{ et } M \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0 \end{aligned}$$

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$

Droite donnée par un point et un vecteur normal :

Méthode 2.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{aligned}$$

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Méthode 3.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A.
Si n a pour coordonnées $(a; b)$ alors l'équation de D est de la forme $ay + bx + c = 0$. On détermine c par identification en utilisant le fait que $A \in \mathcal{D}$.

Exemple
Déterminer par cette méthode une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(3,-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

Remarque :
Si on connait un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, on peut en déduire un vecteur normal et utiliser la méthode précédente.

Exemple
Déterminer par cette méthode une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(3,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

IV.3 Parallélisme et orthogonalité

Proposition 19.

Soit d_1 et d_2 deux droites d'équations cartésiennes $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$.
d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement si les couples $(a_1;b_1)$ et $(a_2;b_2)$ sont proportionnels.
d_1 et d_2 sont perpendiculaires si et seulement si $a_1a_2+b_1b_2=0$

IV.4 Equations paramétriques

Proposition 20.

Une droite d passant par A de coordonnées $(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta)$. Un système d'équations paramétriques de la droite d est :

$$\begin{cases} x = x_A+\alpha t \\ y = y_A+\beta t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Méthode 4.

Passer d'une équation cartésienne à un système d'équations paramétriques et réciproquement.

IV.5 Distance d'un point à une droite

Définition 9.

Soient d une droite du plan et M un point du plan. On appelle distance de M à d et on note $d(M,d)$ la plus petite distance entre M et un point de d.

Si $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ et $M(x_M,y_M)$ un point du plan alors

$$d(M,\mathcal{D})=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{n}\|}$$

Démonstration :

Si $\mathcal{D}$ une droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et $M(x_M, y_M)$ un point du plan alors

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration :

Si $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax+by+c=0$ et $M(x_M, y_M)$ un point du plan alors

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration :

V Cercles du plan

V.1 Equation cartésienne

Proposition 21.

L'équation cartésienne du cercle de rayon R de centre $\Omega(x_A; y_A)$ est $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$

Exemple
Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(3,7)$ et de rayon 10

Proposition 22.

Réciproquement toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

où α et β sont des nombres réels représente soit un cercle (éventuellement réduit à son centre) soit l'ensemble vide.

Exemple
Déterminer la nature des ensembles d'équations :

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 5y - 4 = 0$$

Proposition 23.

Si A et B sont deux points du plan le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Exemple
Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(2,2)$ et $B(-10,6)$. Quel est son centre ? son rayon ?

V.2 Représentation paramétrique

Proposition 24.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r.
Un point $M(x,y)$ du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = a + r\cos(t) \\ y = b + r\sin(t) \end{cases}$$

VI Transformations du plan

Plus tard dans l'année.