

## Chapitre 11 : Polynômes

### Table des matières

I	Définition	1
II	Degré d'un polynôme	2
III	Opérations élémentaires dans $\mathbb{K}[X]$	2
IV	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	5
V	Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	7
VI	Racines d'un polynôme et factorisation	9
VII	Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$	12
	VII.1 Définition	12
	VII.2 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$	12
	VII.3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$	14
VIII	Relations coefficients-racines	15
IX	Exercices	16
X	Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	17

Rajouter en très important

$$P(X) = \sum a_k X^k$$

$$P(\alpha) = \sum a_k \alpha^k$$

$$P(\bar{\alpha}) = \sum a_k \bar{\alpha}^k = \dots = \overline{P(\alpha)}$$

Montrer que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  :

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$$

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Définition

**Définition 1** (Polynôme).

On appelle **polynôme** à coefficients dans  $\mathbb{K}$  toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle que :

.....

↳ **Exemple 1**

$P = (2, -1, 0, 5, 4, 1, 0, 0, \dots)$ . On peut réécrire :

$$P = \dots\dots\dots$$

**Vocabulaire :**

$X$  s'appelle l'indéterminée.

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un polynôme, les  $a_n$  sont les **coefficients** du polynôme.

↳ **Exemple 2** •  $X^2 + X + 1 = \dots\dots\dots$

- $(-1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
- $X = \dots\dots$
- $a = \dots\dots$
- Le polynôme nul

**Remarque :**

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, c'est-à-dire, si  $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$P = Q \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

**II Degré d'un polynôme****Définition 2 (Degré).**

Soit  $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un polynôme non nul.

On appelle **degré** de  $P$  et on note  $\deg(P)$  le plus grand entier  $k$  tel que  $a_k \neq 0$ .

↳ **Exemple 3** 1.  $P = (0, 1, 0, 3, 7, 0, 0, 0, 0, \dots)$

$$\deg(P) = \dots$$

2.  $P = X^2 + X^3 + X + 1$

$$\deg(P) = \dots$$

**Convention.**

Par convention, le degré du polynôme nul est  $\dots\dots$  avec les conventions :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\dots\dots < n$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\dots\dots) + n = n + (\dots\dots) = \dots\dots$

On note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .

↳ **Exemple 4**

1.  $P = iX^3 + 2X + 7i \in \dots\dots\dots$

2.  $Q = X^7 - 1 \in \dots\dots\dots$

3.  $R = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4 \in \dots\dots\dots$

**Définition 3.**

Un **polynôme à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$**  est une expression de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

où  $n$  est un entier naturel et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ .

On dit que  $(a_0, \dots, a_n)$  sont les **coefficients de  $P$**  et  $X$  est l'**indéterminée**.

**Vocabulaire :**

Si  $d = \deg(P)$ , le monôme  $a_dX^d$  est appelé le **monôme dominant de  $P$**  et le coefficient  $a_d$  est appelé le **coefficient dominant**.

Un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1 est appelé polynôme unitaire.

### III Opérations élémentaires dans $\mathbb{K}[X]$

Dans ce qui suit, on utilisera, pour le polynôme  $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , l'écriture  $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ . Cette somme est toujours finie!

#### Activité :

Somme de deux polynômes

#### Définition 4 (Somme).

Si  $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ , on appelle **somme** de  $P$  et  $Q$  le polynôme :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k$$

#### Exemple 5

Si  $P = X^2 + 3X + 1$  et  $Q = 1 + X^2 + X^4$  alors  $P + Q = \dots\dots\dots$

Si  $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$  et  $Q = -X^6 + X^5 - 8X^4 + X^2 + X + 1$  alors  $P + Q = \dots\dots\dots$

#### Proposition 1 (Degré d'une somme).

Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ . On a :

$$\deg(P + Q) \leq \dots\dots\dots$$

avec égalité ssi  $\dots\dots\dots$

et inégalité stricte ssi  $\dots\dots\dots$

#### Remarque :

L'inégalité peut être stricte, comme dans l'exemple précédent la proposition.

#### Définition 5 (Multiplication par un scalaire).

Si  $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $\lambda P$  le polynôme :

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) X^k$$

#### Exemple 6

Si  $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$  et alors  $-2P = \dots\dots\dots$

#### Proposition 2 (Degré de $\lambda P$ ).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

1. Si  $\lambda \neq 0$ ,  $\deg(\lambda P) = \dots\dots\dots$
2. Si  $\lambda = 0$  alors  $\deg(\lambda P) = \dots\dots\dots$

#### Exemple 7

Si  $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$  et  $\lambda = 3$  alors  $\lambda P = \dots\dots\dots$

**Activité :**

Produit de deux polynômes

**Définition 6** (Produit de deux polynômes).

Si  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ , on appelle **produit** de  $P$  et  $Q$  et on note  $PQ$  le polynôme :

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$$

où

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

**Remarque :**

On a  $\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$  donc  $PQ = QP$  et la multiplication est commutative.

**Exemple 8**

Si  $P = 8X^2 - 9X + 1$  et  $Q = -X^2 + X + 1$  alors  $PQ = \dots\dots\dots$

**Proposition 3** (Degré d'un produit).

Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ . On a

$$\deg(PQ) = \dots\dots\dots$$

**Remarque :**

La convention  $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$  est bien utile ici !

**Exemple 9**

Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_{n+1} = XP_n - 2 \\ P_0 = -1 \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_n) = n$

**Exercice 1**

Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \\ P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \end{cases}$$

Montrer par récurrence double sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_n) = n$

**Définition 7** (Puissance).

Si  $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$  on définit les puissances de  $P$  par récurrence :  $P^0 = 1$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P^{n+1} = P^n P$ .

**Exemple 10**

Si  $P = X^2 - 2$  alors  $P^3 = \dots\dots\dots$

**Proposition 4.**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On a

$$\deg(P^n) = \dots\dots\dots$$

**Définition 8** (Composée de deux polynômes).

Si  $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ , on note  $P \circ Q$  le polynôme :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q^k$$

**Exemple 11**

Si  $P = X^2 - 3X + 5$  et  $Q = X^3 + X - 3$  alors  $P \circ Q = \dots\dots\dots$  et  $Q \circ P = \dots\dots\dots$

**Proposition 5.**

Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ . On a

$$\deg(P \circ Q) = \dots\dots\dots$$

**Remarque :**

La notation  $P(X+1)$  désigne la composée du polynôme  $X+1$  par le polynôme  $P$  tandis que  $(X+1)P$  désigne le produit des deux.

**Exercice 2**

Déterminer  $P(X+1)$  et  $(X+1)P$  dans les cas suivants :

1.  $P = X^2 + 3X + 1$
2.  $P = X^n + 1$
3.  $P = (X-1)^n - 1$

**IV Arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$** **Définition 9** (Diviseur de polynôme).

Soit  $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$  avec  $B \neq 0$ . On dit que  $B$  divise  $A$  s'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = BQ$ . On note  $B|A$  cette relation.

Si  $B$  divise  $A$ , on dit que  $B$  est un **diviseur** de  $A$  et que  $A$  est un **multiple** de  $B$ .

**Exemple 12**

$X+1$  divise  $X^2 - 1$  car  $X^2 - 1 = \dots\dots\dots$

$X$  divise  $X^{10} + X^6 - X$ .

$(X-1)$  divise  $X^{10} - 1$  car  $\dots\dots\dots$

Un polynôme constant non nul divise tous les polynômes.



**Méthode 2** (Trouver le reste sans effectuer la division euclidienne).

Parfois, on aura besoin que du reste de la division de  $A$  par  $B$ .

Pour trouver le reste de la division de  $A$  par  $B$  on écrit  $A = BQ + R$  où  $R = \sum_{k=0}^{\deg(B)-1} a_k X^k$  et on évalue ensuite en les racines de  $B$  pour trouver les coefficients  $a_k$ .

**Exercice 5**

Déterminer le reste de la division de  $X^{10} - X^5$  par  $X^2 - 3X + 2$

**Exercice 6**

Soit  $n \geq 2$ . On considère les polynômes  $A = X^n + 2X - 2$  et  $B = X^2 - 1$ .

1. En utilisant la méthode ci-dessus, déterminer le reste  $R$  de la division de  $A$  par  $B$
2. La méthode fonctionne-t-elle si on veut le reste de la division de  $A$  par  $(X - 1)^2$ ? par  $(X - 3)^2$

**Exercice 7**

Déterminer le reste de la division de  $X^n + 1$  par  $X^2 + 4X + 4$

**Exercice 8**

Déterminer le reste de la division de  $X^n + 1$  par  $2 - X - 2X^2 + X^3$

**Exercice 9**

Déterminer les restes de la division de  $X^n$  par  $B = X^2 - 3X - 4$  puis par  $B = X^2 + 1$  puis par  $X^2 + 6X + 9$ .

**Proposition 6** (Caractérisation de la divisibilité).

Soit  $A$  et  $B \neq 0$  deux éléments de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  $B|A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

**Méthode 3** (Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle).

Pour calculer l'intégrale de  $\frac{A}{B}$  on écrit  $A = BQ + R$  et on calcule :

$$\int \frac{BQ + R}{B} = \int Q + \int \frac{R}{B}$$

**Exercice 10**

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^5 \frac{t^4}{t^2 + 1} dt$$

$$2. \int_0^5 \frac{x^5 + x^3 - 5x^2 + x - 5}{x^2 + 1} dx$$

**Exercice 11** Application aux puissances de matrices

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer la matrice  $A^2 - 3A + 2I_2$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .
3. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
4. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## V Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

### Définition 11 (Polynôme dérivé).

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ . On appelle **polynôme dérivé de  $P$**  et on note  $P'$  le polynôme défini par

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Proposition 7 (Degré du polynôme dérivé).

On a  $\deg(P') = \dots\dots\dots$  si  $P$  est non constant et  $\deg(P') = \dots\dots\dots$  sinon.

### Exemple 14

$P = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4$ . Déterminer  $P'$ .

### Proposition 8 (Opération et dérivation).

Soient  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ .

1. Linéarité de la dérivée :  $(\lambda P + \mu Q)' = \dots\dots\dots$
2. Formule de Leibniz à l'ordre 1 :  $(PQ)' = \dots\dots\dots$

### Définition 12.

On définit par récurrence les **polynômes dérivés**  $P^{(n)}$  en posant  $P^{(0)} = P$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$

### Remarque :

Ne pas confondre avec les puissances du polynôme  $P$  : ne pas confondre  $P^{(n)}$  et  $P^n$ .

### Exemple 15

$P = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4$ . Déterminer  $P^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 12

$$\begin{cases} P_{n+1} = 2X^2 P'_n - X P_n \\ P_0 = 5 \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(P_n) = n$

### Remarque :

Lien avec la dérivation des fonctions pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

### Proposition 9 (Formule de Leibniz pour les polynômes).

Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $n \in \mathbb{N}$  alors la dérivée  $n^e$  du polynôme  $PQ$  est donnée par la formule

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

**Exercice 13**

Soit  $m \geq 2$ . Soient  $P = X^m$  et  $Q = 1 + 3X + 6X^2$ .

- Déterminer  $Q^{(k)}$  pour tout  $k \geq 0$ .
- Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq m$ ,  $P^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!} X^{m-k}$ .
- Soit  $n \geq 3$ . Combien y a-t-il de termes dans la somme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$ ? Déterminer  $(PQ)^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à l'aide de la formule de Leibniz. On pourra distinguer  $n > m + 2$ ,  $n = m + 2$ ,  $n = m + 1$  et  $n \leq m$ .

**Exercice 14**

On admet que la formule de Leibniz est aussi vraie pour n'importe quelle fonction suffisamment dérivable. Soit  $f : x \mapsto e^{-2x}(x^3 - 4x^2 + 5x + 2)$ . Déterminer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 10** (Formule de Taylor pour les polynômes).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors

$$P = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X - \alpha) + \frac{P^{(2)}(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

Cette formule s'appelle la formule de Taylor à l'ordre  $n$  en  $\alpha$ .

**Exemple 16**

Appliquer la formule de Taylor au polynôme  $X^3 + X^2 + X + 1$  avec  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -1$ . Même exercice avec le polynôme  $X^3 - X^2 + X - 1$ .

**Exercice 15**

Application :

- Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 2 tel que  $P(1) = 2$ ,  $P'(1) = 3$  et  $P''(1) = -1$ .
- Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 3 tel que  $P(0) = 2$ ,  $P'(0) = -2$ ,  $P''(0) = -1$  et  $P^{(3)}(0) = 8$ .
- Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 5 tel que  $P(0) = 2$ ,  $P'(0) = -2$ ,  $P''(0) = -1$ ,  $P^{(3)}(0) = 8$ ,  $P^{(4)}(0) = 5$  et  $P^{(5)}(0) = 8$ .

**VI Racines d'un polynôme et factorisation****Définition 13** (Racine).

On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est racine de  $P$  lorsque  $P(\alpha) = 0$ .

**Proposition 11** (Reste de la division par  $X - \alpha$ ).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in K$ .  
Le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$  est  $P(\alpha)$ .

**Théorème 2** ( $\alpha$  racine de  $P$  ssi  $(X - \alpha)$  divise  $P$ ).

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$

$\alpha$  est racine de  $P$  si et seulement si  $(X - \alpha)$  divise  $P$

**Remarque :**

Lorsque  $\alpha$  est racine de  $P$ , cela donne une méthode de factorisation par  $(X - \alpha)$  parfois plus rapide que l'identification des coefficients.

✎ **Exercice 16**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 47x + 105$ .

1. Calculer  $f(3)$  et en déduire une première factorisation de  $f(x)$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .
3. En déduire une factorisation de  $f(x)$

**Proposition 12** (Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels).

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  :

$$\alpha \text{ racine de } P \Rightarrow \bar{\alpha} \text{ racine de } P$$

**Définition 14** (Racine multiple).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  on dit que  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $k \in \mathbb{N}^*$  (ou racine d'ordre  $k$ ) lorsque

1.  $(X - \alpha)^k$  divise  $P$
2.  $(X - \alpha)^{k+1}$  ne divise pas  $P$

On dit que  $\alpha$  est une racine multiple si son ordre de multiplicité est au moins 2.

**Proposition 13** (Caractérisation des racines multiple).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  on dit que  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $k \in \mathbb{N}^*$  (ou racine d'ordre  $k$ ) ssi

$$P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$$

avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $Q(\alpha) \neq 0$

✎ **Exemple 17**

-1 est racine double de  $X^2 + 2X + 1$

✎ **Exemple 18**

$$(X + 1)^2(X - 1)(X - 2)^3$$

✎ **Exercice 17**

Soit  $P = X^3 - X^2 + X - 1$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

✎ **Exercice 18**

Soit  $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

✎ **Exercice 19**

Soit  $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

✎ **Exercice 20**

Soit  $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

**Proposition 14** (Caractérisation des racines multiples à l'aide des polynômes dérivés).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$\alpha$  est racine d'ordre  $k$  de  $P$  ssi  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

**Démonstration :**

Application de la formule de Taylor.

**Exemple 19**

Vérifier ces deux points pour  $P = X^2 - 2X + 1$  et  $\alpha = 1$ .

Même question pour  $P = X^2 - 1$  et  $\alpha = 1$ .

Même question pour  $P = X^3 - X^2 + X - 1$  et  $\alpha = 1$

**Exercice 21**

Soit  $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

**Exercice 22**

Soit  $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

**Exercice 23**

Soit  $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$  et  $\alpha = 1$ .

Déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et le cas échéant trouver sa multiplicité.

**Exercice 24 6 points**

Soit  $P = 2X^5 - 4X^4 - 12X^3 + 40X^2 - 38X + 12$

1. Trouver une racine évidente de  $P$
2. Déterminer sa multiplicité en tant que racine de  $P$ .
3. En déduire une factorisation de  $P$
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $P(x) = 0$  et déterminer une factorisation maximale de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 25**

Justifier que le polynôme  $X^6 + 2$  admet uniquement des racines simples (sans déterminer ces racines)

**Proposition 15** (Racines multiples et divisibilité).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]^*$  tel que  $\deg(P) \geq 1$ .

Si  $\alpha$  racine de  $P$  d'ordre  $k$  alors  $1 \leq k \leq \deg(P)$

Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont racines d'ordres  $k_1, \dots, k_p$  alors

$$\prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{k_j} | P$$

**Proposition 16** (Majoration du nombre de racine par le degré).

Un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité.

En particulier, si  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  et que  $P$  admet  $n + 1$  racines alors  $P$  est le polynôme nul.

**Méthode 4** (Montrer qu'un polynôme est nul).

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut :

1. Montrer que tous ses coefficients sont nuls.
2. Montrer qu'il est de degré inférieur ou égal à  $n$  et qu'il possède  $n + 1$  racines.
3. Montrer qu'il a une infinité de racines.

- Exercice 26**
1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(i) = 0$ . Montrer que  $P = 0$ .
  2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $tP(\sin(t)) = 0$ . Montrer que  $P = 0$ .
  3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tP(\lfloor t \rfloor) = 0$ . Peut-on en déduire que  $P = 0$  ?

✎ **Exercice 27** *Polynôme de Lagrange*

Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier et  $(a_0, a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  un  $(n+1)$ -uplet de nombres deux à deux distincts. On définit, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$L_i = \frac{\prod_{k \neq i} (X - a_k)}{\prod_{k \neq i} (a_i - a_k)}$$

1. On prend  $n = 2$  et  $(a_0, a_1, a_2) = (-1, 2, 3)$ . Déterminer  $L_0, L_1, L_2$  puis calculer  $L_i(a_j)$  pour  $i, j \in \{0, 1, 2\}$
2. Pour  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , que vaut  $L_i(a_j)$
3. Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$  on a  $P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i(X)$

**Méthode 5** (Montrer que deux polynômes sont égaux).

Pour montrer que deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux on peut appliquer la méthode ci-dessus à  $P - Q$ .

- ✎ **Exercice 28**
1. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(i) = Q(i)$ . Montrer que  $P = Q$ .
  2. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $P(x) = Q(x)$ . Montrer que  $P = Q$ .

**Définition 15** (Polynôme scindé).

Un polynôme non nul de degré  $n$  est dit **scindé sur**  $\mathbb{K}$  s'il admet exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{K}$  (comptées avec multiplicité).

✎ **Exemple 20**

$X^2 + 1$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$

✎ **Exercice 29**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si  $\alpha$  est racine de  $P$  et déterminer, le cas échéant, sa multiplicité en tant que racine de  $P$

1.  $P = X^2 + 2X + 2$  et  $\alpha = 1$ .
2.  $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$  et  $\alpha = 1$ .
3.  $P = X^3 - 2X - 4$  et  $\alpha = 2$ .
4.  $P = X^5 - 11X^4 + 46X^3 - 90X^2 + 81X - 27$  et  $\alpha = 3$ .

Les polynômes précédents sont-ils scindés sur  $\mathbb{C}$ ? Sur  $\mathbb{R}$ ?

## VII Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

### VII.1 Définition

**Définition 16** (Polynôme irréductible).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est irréductible si  $P$  est non constant et si les seuls diviseurs de  $P$  sont les  $\lambda$  et  $\lambda P$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

**Proposition 17** (Reformulation).

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est irréductible si  $P$  est non constant et si

$$P = AB \Rightarrow A \in \mathbb{K}^* \text{ ou } B \in \mathbb{K}^*$$

## VII.2 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

### **Théorème 3** (d'Alembert-Gauss).

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

### **Proposition 18** (Conséquence 1).

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

### **Proposition 19** (Conséquence 2).

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1

### **Théorème 4** (Décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles).

Tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs :

$$P = a(X - \alpha_1)^{r_1} \dots (X - \alpha_p)^{r_p} = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k}$$

### Exemple 21

#### **Méthode 6** (Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ ).

Pour obtenir la décomposition d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  en produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}[X]$  on peut trouver une racine  $\alpha$  (soit parce que cette racine est évidente, soit parce que l'énoncé nous aide), puis diviser  $P$  par  $X - \alpha$  puis chercher les racines du quotient. Cela fonctionne idéalement lorsque le polynôme de départ est de degré 3.

### Exemple 22

Décomposer comme produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  suivant. On commencera par chercher une racine réelle.

$$2X^3 + (2 - 2i)X^2 + (4 - 2i)X + 4$$

### Exercice 30

Décomposer comme produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  suivant. On commencera par chercher une racine « évidente ».

$$X^3 - 2X^2 + 9X - 18$$

#### **Méthode 7** (Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ ).

Pour obtenir la décomposition d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  en produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}[X]$  :

1. Déterminer les racines complexes  $\alpha_k$  de  $P$ , ce qui revient à résoudre  $P(z) = 0$ .
2. Déterminer les ordres de multiplicité  $r_k$  de chacune des racines
3. D'après le théorème précédent, il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k}$ .
4. Par identification des coefficients,  $a$  est le coefficient dominant de  $P$ .

**Exemple 23**

Décomposer comme produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  suivant.

$$P = X^4 + 1$$

**Exemple 24**

Décomposer comme produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  suivant.

$$P = -X^5 + i$$

**Exercice 31**

Décomposer comme produit d'irréductibles sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  suivant.

$$P = 3 - 3X^3$$

**Proposition 20** (Décomposition de  $X^n - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ ).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2\pi}{n}})$$

**VII.3 Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$** **Remarque :**

Une telle décomposition n'est pas toujours possible sur  $\mathbb{R}$

**Exemple 25**

$$X^2 + 1$$

**Proposition 21** (Irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ ).

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant négatif

**Théorème 5** (Décomposition en produit d'irréductibles sur  $\mathbb{R}[X]$ ).

Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs :

$$P = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k} \times \prod_{j=1}^q (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{s_j}$$

où les  $X^2 + \beta_j X + \gamma_j$  ont un discriminant négatif.

**Proposition 22** (Multiplicité d'une racine complexe d'un polynôme à coefficients réels).

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  une racine de  $P$ . On a alors  $\bar{\alpha}$  racine de  $P$  de même multiplicité que  $P$

**Exemple 26**

$$X^4 + X^2 + 1$$

**Exercice 32**

Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles  $\mathbb{R}[X]$  de  $X^4 + 1$ , de  $X^4 - 1$  et de  $Q = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$  (on remarquera que  $Q(\frac{2}{3}) = 0$ )

**Méthode 8** (Décomposition en produit d'irréductible sur  $\mathbb{R}[X]$ ).

Puisque  $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$  on peut considérer  $P$  comme un polynôme à coefficients complexes.

1. Décomposer  $P$  en produit de facteurs  $(X - \xi_i)^{r_i}$  où les  $\xi_i$  sont les racines réelles ou complexes de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Pour les racines complexes, comme elles sont nécessairement deux à deux conjuguées, regrouper les facteurs  $(X - \xi_j)^{s_j} (X - \bar{\xi}_j)^{s_j} = (X^2 - 2 \operatorname{Re}(\xi_j)X + |\xi_j|^2)^{s_j}$
3. Déterminer le coefficient  $a$  par identification.

**Exemple 27**

$$-2X^4 + 2$$

**Exercice 33**

Décomposer en produit de polynôme irréductibles sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  les polynômes suivants :

1.  $2X^3 - 5X^2 + 2X + 1$
2.  $X^5 - 1$
3.  $X^6 + 1$
4.  $X^3 + X^2 + X + 1$
5.  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
6.  $-X^8 + 2X^4 - 1$
7.  $1 - X^8$
8.  $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
9.  $-X^3 + X^2 - X + 1$

**VIII Relations coefficients-racines****Proposition 23** (Expression de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients)

Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_0$  un polynôme scindé de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont les racines de  $P$ , on peut écrire :

$$P = a_n (X - x_1) \dots (X - x_n)$$

La somme des racines de  $P$  est donnée par

$$x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Le produit des racines de  $P$  est donné par

$$x_1 \times \dots \times x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

**Exercice 34**

$$\text{Soit } P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$$

1. Montrer que  $j$  est racine double de  $P$ .
2. Déterminer la troisième racine de  $P$  en utilisant une relation coefficients-racines.
3. En déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Remarque :**

En particulier lorsque  $n = 2$ ,  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$  et  $x_1, x_2$  les racines de  $P$ , on retrouve

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Autrement dit, chercher deux nombres dont on connaît la somme  $S$  et le produit  $P$  revient à chercher les racines du polynôme  $P$  de degré deux  $P = X^2 - SX + P$ .

**Proposition 24** (Système Somme-Produit).

Soit  $(S, P) \in \mathbb{K}^2$ .

Les solutions du système  $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$  sont les couples  $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les solutions éventuellement confondues de l'équation du deuxième degré  $x^2 - Sx + P = 0$ .

**Exercice 35**

Déterminer tous les couples  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  tels que

1.  $xy = 2$  et  $x + y = 3$
2.  $x + y = 2$  et  $xy = 3$
3.  $xy = 8$  et  $x + y = 5$
4.  $xy = 5$  et  $x + y = 8$

**Exercice 36**

Soit  $(S) \begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{cases}$

1. Déterminer les valeurs de la somme  $S = x + y$  et du produit  $P = xy$  de tout couple  $(x; y)$  solution de  $(S)$ .
2. Résoudre  $(S)$ .

**IX Exercices****Exercice 37**

1. Résoudre les équations d'inconnue  $P \in \mathbb{K}[X]$  suivantes :
  - (a)  $(P')^2 = 4P$
  - (b)  $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$
2. Soient  $P, Q$  et  $R$  trois polynômes à coefficients réels liés par la relation :

$$P^2 - XQ^2 = XR^2$$

Montrer que ces trois polynômes sont nuls.

**Exercice 38**

Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n \geq 2$ .

1. On suppose que  $P$  admet  $n$  racines réelle distinctes. Montrer que  $P'$  est scindé et admet  $n - 1$  racines distinctes. *On admettra le théorème de Rolle : Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction à valeurs réelles continue sur  $]a, b[$  et dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe au moins un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .*
2. On suppose que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P'$  est scindé.

**Exercice 39**

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré 3 tel que  $P(0) = 1$ ,  $P'(0) = 0$ ,  $P''(0) = -\frac{1}{2}$  et  $P^{(3)}(0) = 22$ .

**Exercice 40**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

1. Soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $K$  tels que  $a \neq b$ . Exprimer à l'aide de  $P(a)$  et  $P(b)$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .
2. Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Exprimer à l'aide de  $P(a)$  et  $P'(a)$  le reste de la division de  $P$  par  $(X - a)^2$ .

**Exercice 41**

Décomposer en produit de polynômes de degré 1 dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme

$$P = 6X^4 + X^3 + (6i + 10)X^2 + (2 + i)X - (4 + 2i)$$

sachant que le polynôme  $P$  possède des racines réelles.

 **Exercice 42**

Soit  $P = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$

1. Montrer que  $\frac{1}{2}$  est racine multiple de  $P$  et préciser sa multiplicité.
2. En déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

 **Exercice 43**

Pour quelle(s) valeur(s) de  $a \in \mathbb{R}$  le polynôme  $P = (X + 1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

 **Exercice 44**

Déterminer les polynômes  $P$  vérifiant la relation  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$ .

 **Exercice 45**

Introduisons la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée des polynômes

$$P_0 = X \quad \text{et} \quad P_1 = 3X - 4X^3,$$

et par la relation de récurrence

$$P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , le degré et le coefficient dominant du polynôme  $P_n$ .
2. Montrer que le polynôme  $X$  divise  $P_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
3. Exprimer  $\sin(3\theta)$  en fonction de  $\sin(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .
4. Prouver que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout nombre réel  $\theta$ ,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n + 1)\theta).$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme  $P_n$  est le seul polynôme vérifiant pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$P_n(\sin(\theta)) = \sin((2n + 1)\theta) ?$$

(b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $P_n(\sin(\theta)) = 0$  d'inconnue  $\theta$  réelle.

(c) En déduire les racines de  $P_n$  dans  $[-1; 1]$  et factoriser  $P_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

## X Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles

### Définition 17 (Fraction rationnelle).

On appelle **fraction rationnelle** tout quotient du type  $\frac{P}{Q}$  avec  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  et  $Q \neq 0$

### Proposition 25 (Décomposition en élément simple).

Soit  $R = \frac{P}{Q}$  une fraction rationnelle. Si  $Q$  est scindé à racines simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alors il existe une unique décomposition :

$$R(X) = E(X) + \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec  $E(X) \in \mathbb{K}[X]$  et pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $a_i \in \mathbb{K}$

### Exemple 28

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $R(X) = \frac{X^3+3X+1}{X^2-1}$  et en déduire une primitive de  $x \mapsto \frac{x^3+3x+1}{x^2-1}$  sur  $]1; +\infty[$

### Exercice 46

1. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  les fonctions rationnelles suivantes :

- $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
- $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$
- $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$  (avec indication obligatoire dans l'énoncé)
- $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$
- $\frac{X}{X^2-4}$
- $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$

2. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  les fonctions rationnelles suivantes :

- $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$
- $\frac{X+i}{X^2+i}$
- $\frac{X}{(X+i)^2}$  (avec indication obligatoire dans l'énoncé)

3. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  les fonctions rationnelles suivantes :

- $\frac{X^2+1}{X^4+1}$
- $\frac{X}{X^4+1}$
- $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$
- $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$
- $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$
- $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
- $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$

Exercice 47 Application au calcul d'intégrales 1.  $\int_5^{10} \frac{x^4}{(x+1)(x-4)} dx$

2.  $\int_1^x \frac{t-5}{-2t-3} dt$

### Exercice 48

Soit  $F = \frac{1}{X^2+1}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  à coefficients entiers tel que  $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^n}$ .
- Montrer que les racines de  $P_n$  sont réelles et simples.