Chapitre ... : Polynômes

Compétences :

☞ Calculer une somme, un produit de polynômes et connaître les propriétés du degré.
☞ Effectuer une division euclidienne de polynômes.
☞ Trouver le reste d'une division euclidienne sans effectuer la division euclidienne.
☞ Déterminer les racines d'un polynôme, caractériser les racines par la divisibilité.
☞ Décomposer un polynôme non constant en produit de polynômes de degré 1 sur $\mathbb{C}$.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définition

Définition 1 (Polynôme)**.**

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle que :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple
$P = (2, -1, 0, 5, 4, 1, 0, 0\ldots)$. On peut réécrire :

$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vocabulaire :
X s'appelle l'indéterminée.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, les a_n sont les **coefficients** du polynôme.

Exemple
- $X^2 + X + 1 = \ldots\ldots$
- $(-1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$
- $X = \ldots\ldots$
- $a = \ldots\ldots$
- Le polynôme nul

Remarque :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, c'est-à-dire, si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$P = Q \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

II Degré d'un polynôme

Définition 2 (Degré)**.**

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
On appelle **degré** de P et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Exemple 1. $P = (0, 1, 0, 3, 7, 0, 0, 0, 0, \dots)$

$$\deg(P) = \dots$$

2. $P = X^2 + X^3 + X + 1$

$$\deg(P) = \dots$$

Convention.

Par convention, le degré du polynôme nul est ...... avec les conventions :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dots\dots < n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\dots\dots) + n = n + (\dots\dots) = \dots\dots$

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Exemple

1. $P = iX^3 + 2X + 7i \in \dots\dots\dots$
2. $Q = X^7 - 1 \in \dots\dots\dots$
3. $R = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4 \in \dots\dots\dots$

Vocabulaire :
Si $d = \deg(P)$, le monôme $a_d X^d$ est appelé le **monôme dominant de** P et le coefficient a_d est appelé le **coefficient dominant**.
Un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1 est appelé polynôme unitaire.

III Opérations élémentaires dans $\mathbb{K}[X]$

Dans ce qui suit, on utilisera, pour le polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'écriture $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Cette somme est toujours finie !

Activité :
Somme de deux polynômes

Définition 3 (Somme).

Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$, on appelle **somme** de Pet Q le polynôme :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k$$

Exemple
Si $P = X^2 + 3X + 1$ et $Q = 1 + X^2 + X^4$ alors $P + Q = \dots\dots\dots$
Si $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$ et $Q = -X^6 + X^5 - 8X^4 + X^2 + X + 1$ alors $P + Q = \dots\dots\dots$

Proposition 1 (Degré d'une somme).

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a :

$$\deg(P + Q) \leq \dots\dots\dots$$

Démonstration :

Remarque :
L'inégalité peut être stricte, comme dans l'exemple précédent la proposition.

Définition 4 (Multiplication par un scalaire)**.**

Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note λP le polynôme :

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) X^k$$

Exemple
Si $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$ et alors $-2P = \dots\dots\dots$

Proposition 2 (Degré de λP)**.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda P) = \dots\dots$
2. Si $\lambda = 0$ alors $\deg(\lambda P) = \dots\dots$

Exemple
Si $P = X^6 + 7X^3 + 8X^2 - 9X + 1$ et $\lambda = 3$ alors $\lambda P = \dots\dots\dots$

Activité :
Produit de deux polynômes

Définition 5 (Produit de deux polynômes)**.**

Si $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, on appelle **produit** de P et Q et on note PQ le polynôme :

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$$

où

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Remarque :
On a $\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$ donc $PQ = QP$ et la multiplication est commutative.

Exemple
Si $P = 8X^2 - 9X + 1$ et $Q = -X^2 + X + 1$ alors $PQ = \dots\dots\dots$

Proposition 3 (Degré d'un produit)**.**

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a

$$\deg(PQ) = \dots\dots\dots$$

Remarque :
La convention $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$ est bien utile ici !

Définition 6 (Puissance).

Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ on définit les puissances de P par récurrence : $P^0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P^{n+1} = P^n P$.

Exemple
Si $P = X^2 - 2$ alors $P^3 = \dots\dots\dots$

Proposition 4.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a
$$\deg(P^n) = \dots\dots\dots$$

Définition 7 (Composée de deux polynômes).

Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, on note $P \circ Q$ le polynôme :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q^k$$

Exemple
Si $P = X^2 - 3X + 5$ et $Q = X^3 + X - 3$ alors $P \circ Q = \dots\dots\dots$ et $Q \circ P = \dots\dots\dots$

Proposition 5.

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On a
$$\deg(P \circ Q) = \dots\dots$$

IV Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 8 (Diviseur de polynôme).

.
Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$. On dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note $B|A$ cette relation.
Si B divise A, on dit que B est un **diviseur** de A et que A est un **mutliple** de B.

Exemple
$X + 1$ divise $X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = \dots\dots$
X divise $X^{10} + X^6 - X$.
$(X - 1)$ divise $X^{10} - 1$ car $\dots\dots\dots$
Un polynôme constant non nul divise tous les polynômes.

Théorème 1 (Théorème de la division euclidienne)**.**

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$. Il existe un **unique** couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Définition 9 (Quotient et reste)**.**

Avec les notations du théorème précédent, Q est le reste de la division euclidienne de A par B et R est le reste de la division euclidienne de A par B.

Méthode 1 (Effectuer une division euclidienne)**.**

Division euclidienne de X^3+X^2-1 par $X-1$. La division s'effectue suivant les **puissances décroissantes**.

$$\begin{array}{cccc|cc} X^3 & +X^2 & & -1 & X & -1 \\ \hline \end{array}$$

Résultat :

Exemple
Division euclidienne de $A = 4X^2 + 6X^3$ par $B = 2X - 1$

Exercice 1
Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^3 - X^2 + X - 1$ et $B = X - 1$
2. $A = X^3 + X^2 - X - 1$ et $B = X - 1$
3. $A = X^3 + X^2 - X - 1$ et $B = X + 1$
4. $A = 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 - 2X + 6$ et $B = X^3 - 5X^2 + 2X - 4$
5. $A = X^3 - 5X^2 + 2X - 4$ et $B = 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 - 2X + 6$

Exercice 2
Effectuer les divisions euclidiennes de A par B lorsque :

1. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$
2. $A = 3X^5 + 7X^4 - 5X^2 + 1$ et $B = 2X^3 - 4X^2 + X$
3. $A = 2X^3 - 5X^2 + 2X + 1$ et $B = X - 1$
4. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$

Méthode 2 (Trouver le reste sans effectuer la division euclidienne).

.
Parfois, on aura besoin que du reste de la division de A par B.

Pour trouver le reste de la division de A par B on écrit $A = BQ + R$ où $R = \sum_{k=0}^{\deg(B)-1} a_k X^k$ et on évalue ensuite en les racines de B pour trouver les coefficients a_k.

Exercice 3
Déterminer le reste de la division de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$

Exercice 4
Soit $n \geq 2$. On considère les polynômes $A = X^n + 2X - 2$ et $B = X^2 - 1$.

1. En utilisant la méthode ci-dessus, déterminer le reste R de la division de A par B
2. La méthode fonctionne-t-elle si on veut le reste de la division de A par $(X-1)^2$?

Exercice 5
Déterminer les restes de la division de X^n par $A = X^2 - 3X - 4$ puis par $B = X^2 + 1$.

Proposition 6 (Caractérisation de la divisibilité).

Soit A et $B \neq 0$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Alors $B|A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Méthode 3 (Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle).

Pour calculer l'intégrale de $\dfrac{A}{B}$ on écrit $A = BQ + R$ et on calcule :

$$\int \frac{BQ+R}{B} = \int Q + \int \frac{R}{B}$$

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^5 \frac{t^4}{t^2+1}dt$
2. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x^5 + x^3 - 5x^2 + x - 5}{x^2+1}dx$
3. $\displaystyle\int_5^{10} \frac{x^4}{(x+1)(x-4)}dx$
4. $\displaystyle\int_1^x \frac{t-5}{-2t-3}dt$

Exercice 7 *Application aux puissances de matrices*
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 10 (Polynôme dérivé)**.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On appelle **polynôme dérivé de** P et on note P' le polynôme défini par

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 7 (Degré du polynôme dérivé)**.**

On a $\deg(P') = \ldots\ldots$ si P est non constant et $\deg(P') = \ldots\ldots$ sinon.

Exemple
$P = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4$. Déterminer P'.

Proposition 8 (Opération et dérivation)**.**

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. Linéarité de la dérivée : $(\lambda P + \mu Q)' = \ldots\ldots$
2. Formule de Leibniz à l'odre 1 : $(PQ)' = \ldots\ldots$

Définition 11.

On définit par récurrence les **polynômes dérivés** $P^{(n)}$ en posant $P^{(0)} = P$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$

Remarque :
Ne pas confondre avec les puissances du polynôme P : ne pas confondre $P^{(n)}$ et P^n.

Exemple
$P = 1 + 2X - 4X^2 + 6X^3 - \frac{1}{5}X^4$. Déterminer $P^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :
Lien avec la dérivation des fonctions pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Proposition 9 (Formule de Leibniz)**.**

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $n \in \mathbb{N}$ alors la dérivée n^e du polynôme PQ est donnée par la formule

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Exercice 8
Soit $m \geq 2$. Soient $P = X^m$ et $Q = 1 + 3X + 6X^2$.

1. Déterminer $Q^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $P^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!} X^{m-k}$.
3. Soit $n \geq 3$. Combien y a-t-il de termes dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$? Déterminer $(PQ)^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Leibniz.

Proposition 10 (Formule de Taylor)**.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + \frac{P^{(2)}(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Cette formule s'appelle la formule de Taylor à l'ordre n en α.

Exemple
Appliquer la formule de Taylor au polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ avec $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$. Même exercice avec le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$.

Exercice 9
Application :

1. Montrer qu'il existe un unique polynome de degré 2 tel que $P(1) = 2$, $P'(1) = 3$ et $P''(1) = -1$
2. Montrer qu'il existe un unique polynome de degré 3 tel que $P(0) = 2$, $P'(0) = -2$, $P''(0) = -1$ et $P^{(3)}(0) = 8$
3. Montrer qu'il existe un unique polynome de degré 5 tel que $P(0) = 2$, $P'(0) = -2$, $P''(0) = -1$, $P^{(3)}(0) = 8$, $P^{(4)}(0) = 5$ et $P^{(5)}(0) = 8$

VI Racines d'un polynôme et factorisation

Proposition 11.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in K$.
Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.

Théorème 2 (Caractérisation des racines)**.**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ si et seulement si } (X-\alpha) \text{ divise } P$$

Remarque :
Lorsque α est racine de P, cela donne une méthode de factorisation par $(X - \alpha)$ parfois plus rapide que l'identification des coefficients vue au S1.

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 47x + 105$.

1. Calculer $f(3)$ et en déduire une première factorisation de $f(x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
3. En déduire une factorisation de $f(x)$

Définition 12 (Racine multiple)**.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ on dit que α est racine de P de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ (ou racine d'ordre k) lorsque

1. $(X-\alpha)^k$ divise P
2. $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P

On dit que α est une racine multiple si son ordre de multiplicité est au moins 2.

Exemple
-1 est racine double de $X^2 + 2X + 1$

Exemple
$(X+1)^2(X-1)(X-2)^3$

Exercice 11
Soit $P = X^3 - X^2 + X - 1$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 12
Soit $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 13
Soit $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 14
Soit $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Proposition 12 (Caractérisation des racines multiples)**.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, et $k \in \mathbb{N}^*$.
α est racine d'ordre k de P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Démonstration :
Application de la formule de Taylor.

Exemple
Vérifier ces deux points pour $P = X^2 - 2X + 1$ et $\alpha = 1$.
Même question pour $P = X^2 - 1$ et $\alpha = 1$.
Même question pour $P = X^3 - X^2 + X - 1$ et $\alpha = 1$

Exercice 15
Soit $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 16
Soit $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 17
Soit $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ et $\alpha = 1$.
Déterminer si α est racine de P et le cas échéant trouver sa multiplicité.

Exercice 18 *6 points*

.
Soit $P = 2X^5 - 4X^4 - 12X^3 + 40X^2 - 38X + 12$

1. Trouver une racine évidente de P
2. Déterminer sa multiplicité en tant que racine de P.
3. En déduire une factorisation de P
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et déterminer une factorisation maximale de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19
Soit $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$

1. Montrer que j est racine double de P.
2. Déterminer la troisième racine de P en utilisant une relation coefficients-racines.
3. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 13.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]^*$ tel que $\deg(P) \geq 1$.
Si α racine de P d'ordre k alors $1 \leq k \leq \deg(P)$
Si $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont racines d'odres $k_1, \dots k_p$ alors

$$\prod_{j=1}^{p}(X - \alpha_j)^{k_j} | P$$

Proposition 14.

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
En particulier, si $\deg(P) \leq n$ et que P admet $n+1$ racines alors P est le polynôme nul.

Méthode 4 (Montrer qu'un polynôme est nul).

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut :

1. Montrer que tous ses coefficients sont nuls.
2. Montrer qu'il est de degré inférieur ou égal à n et qu'il possède $n+1$ racines.
3. Montrer qu'il a une infinité de racines.

Exercice 20 1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(i) = 0$. Montrer que $P = 0$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $tP(\sin(t)) = 0$. Montrer que $P = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $tP(\lfloor t \rfloor) = 0$. Peut-on en déduire que $P = 0$?

Exercice 21
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $(a_0, a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)-$uplet de nombres deux à deux distincts. On définit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

1. Pour $i, j \in [\![0, n]\!]$, que vaut $L_i(a_j)$
2. Montrer que pour tout polynôme $\in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n on a $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$

Méthode 5 (Montrer que deux polynômes sont égaux).

Pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux on peut appliquer la méthode ci-dessus à $P-Q$.

Exercice 22
1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(i) = Q(i)$. Montrer que $P = Q$.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $x \in [0, 1]$, $P(x) = Q(x)$. Montrer que $P = Q$.

Définition 13 (Polynôme scindé).

Un polynôme non nul de degré n est dit **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il admet exactement n racines dans $\mathbb{K}$ (comptées avec multiplicité).

Exemple
$X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Exercice 23
Dans chacun des cas suivants, déterminer si α est racine de P et déterminer, le cas échéant, sa multiplicité en tant que racine de P

1. $P = X^2 + 2X + 2$ et $\alpha = 1$.
2. $P = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$ et $\alpha = 1$.
3. $P = X^3 - 2X - 4$ et $\alpha = 2$.
4. $P = X^5 - 11X^4 + 46X^3 - 90X^2 + 81X - 27$ et $\alpha = 3$.

Les polynômes précédents sont-ils scindés sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

VII Décomposition d'un polynôme en produit de polynômes de degré 1

VII.1 Dans C[X]

Théorème 3 (d'Alembert-Gauss).

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 15 (Conséquence 1).

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème 4 (Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs de degré 1).

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ se décompose de manière unique à l'odre près des facteurs :

$$P = a(X - \alpha_1)^{r_1} \dots (X - \alpha_p)^{r_p} = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$$

Méthode 6 (Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs de degré 1)**.**

Pour obtenir la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes de degré 1 :

1. Déterminer les racines complexes α_i de P, ce qui revient à résoudre $P(z) = 0$.
2. Déterminer les ordre de multiplicité r_i de chacune des racines
3. D'après le théorème précédent, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = a\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)^{r_k}$.
4. Par identification des coefficients, a est le coefficient dominant de P.

VII.2 Dans R[X]

Remarque :
Une telle décomposition n'est pas toujours possible sur $\mathbb{R}$

Exemple
$\mathrm{X}^2 + 1$

Théorème 5 (Décomposition d'un polynôme)**.**

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique à l'odre près des facteurs :

$$P = a\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)^{r_k} \times \prod_{j=1}^{q}(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{s_j}$$

où les $X^2 + \beta_j X + \gamma_j$ ont un discriminant négatif.

Exemple
$X^4 + X^2 + 1$

Exercice 24
Déterminer la décomposition en facteurs de degré 1 ou 2 dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^4 + 1$, de $X^4 - 1$ et de $Q = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$ (on remarquera que $Q(\frac{2}{3}) = 0$)

Méthode 7.

Puisque $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ on peut considérer P comme un polynôme à coefficients complexes.

1. Décomposer P en produit de facteurs $(X - \xi_i)^{r_i}$ où les ξ_i sont les racines réelles ou complexes de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Pour les racines complexes, comme elles sont nécessairement deux à deux conjuguées, regrouper les facteurs $(X - \xi_j)^{s_j}(X - \overline{\xi_j})^{s_j} = (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\xi_j)X + |\xi_j|^2)^{s_j}$
3. Déterminer le coefficient a par identification.

Exemple
$X^4 - 1$

Exercice 25
Décomposer en produit de polynôme de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$ et de degré 1 ou 2 dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $2X^3 - 5X^2 + 2X + 1$
2. $X^5 - 1$
3. $X^6 + 1$
4. $X^3 + X^2 + X + 1$
5. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
6. $-X^8 + 2X^4 - 1$
7. $1 - X^8$
8. $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
9. $-X^3 + X^2 - X + 1$

VIII Relations coefficients-racines

Proposition 16.

Soit $P = a_n X^n + \dots a_0$ un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $x_1, \dots, x_n$ sont les racines de P, on peut écrire :

$$P = a_n(X - x_1)\dots(X - x_n)$$

La somme des racines de P est donnée par

$$x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Le produit des racines de P est donné par

$$x_1 \times \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Remarque :
En particulier lorsque $n = 2$, $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et x_1, x_2 les racines de P, on retrouve

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Autrement dit, chercher deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P revient à chercher les racines du polynôme P de degré deux $P = X^2 - SX + P$.

Proposition 17 (Système Somme-Produit)**.**

Soit $(S, P) \in \mathbb{K}^2$.
Les solutions du systèmes $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$ sont les couples $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ où x_1 et x_2 sont les solutions éventuellement confondues de l'équation du deuxième degré $x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice 26
Déterminer tous les couples $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $xy = 2$ et $x + y = 3$
2. $x + y = 2$ et $xy = 3$
3. $xy = 8$ et $x + y = 5$
4. $xy = 5$ et $x + y = 8$

Exercice 27
Soit $(S) \begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{cases}$

1. Déterminer les valeurs de la somme $S = x + y$ et du produit $P = xy$ de tout couple $(x; y)$ solution de (S).
2. Résoudre (S).

IX Exercices

Exercice 28

1. Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ suivantes :
   (a) $(P')^2 = 4P$
   (b) $(X^2+1)P'' - 6P = 0$
2. Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients réels liés par la relation :
$$P^2 - XQ^2 = XR^2$$
   Montrer que ces trois polynômes sont nuls.

Exercice 29
Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$.

1. On suppose que P admet n racines distinctes. Montrer que P' est scindé et admet $n-1$ racines distinctes.
   On admettra le théorème de Rolle : Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. On suppose que P est scindé. Montrer que P' est scindé.

Exercice 30
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$, $P''(0) = -\frac{1}{2}$ et $P^{(3)}(0) = 22$.

Exercice 31
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soient a et b des éléments de K tels que $a \neq b$. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste de la division de P par $(X-a)^2$.

Exercice 32
Décomposer en produit de polynomes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme
$$P = 6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i)$$
sachant que le polynôme P possède des racines réelles.

Exercice 33
Soit $P = X^4 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est racine multiple de P et préciser sa multiplicité.
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 34
Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $P = (X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?