Chapitre ... : Probabilités sur un univers fini

I Espace probabilisé fini

I.1 Expérience aléatoire

Définition 1.

On appelle **expérience aléatoire** une expérience

1. dont le résultat est soumis au **hasard**
2. dont **tous les résultats possibles sont connus**
3. **reproductible** à l'identique

Exemple
On lance une pièce de monnaie en l'air puis on observe la face visible lorsqu'elle tombe.
On lance un dé à six faces et on observe le numéro obtenu sur la face visible.

Définition 2.

On appelle **issue de l'expérience aléatoire** un des résultats possibles de cette expérience aléatoire.
On appelle **univers** associé à une expérience aléaoire l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.
On le note généralement Ω.

Exemple
On lance deux pièces de monnaie. Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ?

$$\Omega = \{\dots\dots\dots\dots\}$$

On lance deux dés à six faces. Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ?

$$\Omega = \{\dots\dots\dots\dots\}$$

Remarque :
Dans ce chapitre on ne s'interessera qu'à des expériences aléatoires dont l'univers est un **ensemble fini**.

I.2 Evénements

Définition 3.

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Un **événement** associé à cet expérience aléatoire est un sous-ensemble (ou partie) de Ω.
L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω).

Exemple
Dans l'exemple du lancer de dé, l'événement $A = \{1; 3; 5\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire.
On peut aussi définir l'événements A comme « le résultat du lancer est un nombre impair ».

Définition 4.

A l'issue de l'expérience aléatoire, on dira que l'événement A est **réalisé** si l'issue ω de l'expérience est un élément de A.
On dit aussi que ω est une **issue favorable à** A.
Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible.
Un événement de la forme $\{\omega\}$ (ne comportant qu'une seule issue ω) est appelé un événement élémentaire.

Exemple
L'issue 1 est une issue favorable à l'événement $A = \{1; 3; 5\}$.
L'événement $\{1\}$ est un événement élémentaire.

Définition 5.

L'événement A **OU** B, appelé disjonction de A et B, est l'événement constitué de toutes les issues favorables à A ou à B.
L'événement A **ET** B, appelé conjonction de A et B est l'événement constitué de toutes les issues favorables à A et à B.
L'événement $\overline{A}$, appelé événement contraire à A est constitué de toutes les issues qui ne sont pas favorables à A.

Exemple
Dans l'exemple du lancer de dé, l'événement contraire de l'événement $A = \{1; 3; 5\}$ est $\overline{A} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

Définition 6.

Deux événements A et $B \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.

Une famille $\{A_i\}_{i\Psi\ldots n}$ d'événemets forme un **système complet d'événements** (S.C.E.) lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et recouvrent Ω, c'est-à-dire :

1. $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

Exemple
Si A est un événement.
$\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.

Exercice 1
Dans l'exemple du lancer de dé, $\{\{1\}; \{2; 4\}; \{5; 6\}\}$ est un S.C.E. Trouver un autre S.C.E.

II Probabilité

Proposition 1.

Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.
Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle probabilité de A le nombre $P(A) \in [0,1]$.

Proposition 2.

Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles,

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Démonstration :

Proposition 3.

Soient A et B deux événements. On a

1. Probabilité du complémentaire : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. Plus généralement : si $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
3. Croissance : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. Probabilité d'une union : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration :

Exemple
$P(\emptyset) = 0$

Exercice 2
On lance un dé équilibré. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur ou égal à 4.

Exercice 3
Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Encadrer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$ à l'aide de $P(A)$ et $P(B)$.

Proposition 4.

Si $\{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un S.C.E alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Définition 8.

Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.

Théorème 1.

Si $\Omega = \{\omega_1; \dots \omega_n\}$ et $p_1, \dots p_n$ des réels positifs tels que $p_1 + \dots p_n = 1$ alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$$

Autrement dit, **une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des évènements élémentaires**.

Définition 9.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ un univers.
On dit qu'on a équiprobabilité (ou probabilité uniforme) si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$.
On a alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ et, pour tout événement A, $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
Autrement dit, si Ω est un univers associé à une expérience aléatoire, la probabilité uniforme est la probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple
Lancer d'un dé **équilibré** à 6 faces. Est-on en situation d'équiprobabilité ?

Exercice 4
On tire simultanément 3 jetons indicernables dans une urne contenant 5 jetons blancs et 10 jetons rouges.
Quel est l'univers Ω. Est-on en situation d'équiprobabilité ?
Déterminer la probabilité de l'évènement A « le tirage comporte au moins un jeton rouge ».

Exercice 5 *Situation de non-équiprobabilité*
On lance une pièce de monnaie truquée de sorte qu'il y ait deux fois plus de chances de tomber sur Pile que sur Face. Déterminer l'univers Ω ainsi que les probabilités des événements élémentaires.
On lance un dé, il y a une chance sur deux que le dé fournisse un 6, les autres faces étant équiprobables.
Déterminer la probabilité d'obtenir un 1.

Remarque :
Attention, la formule $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ ne s'applique qu'en situation d'équiprobabilité ! !
Exemple : calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans l'exemple précédent.

III Indépendance et conditionnement

III.1 Probabilité conditionnelle

Définition 10.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soient A et B sont deux événements tels que B est non négligeable (c'est-à-dire tel que $P(B) > 0$). On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On la note aussi $P(A|B)$.

Remarque :
Si Ω est muni d'une probabilité uniforme, la probabilité de A sachant B se comprend comme la proportion du nombre d'éléments de A à l'intérieur de B. Si Ω est muni d'une probabilité quelconque, l'idée est semblable : la probabilité de A sachant B mesure la proportion de chance d'obtenir la réalisation de A lorsque B réalisé.

Exemple
On lance un dé équilibré à 6 faces.
Soit B l'événement « le nombre obtenu est pair » et A l'événement « on obtient 6 ».
Déterminer $P(A|B)$.

Proposition 5.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soit B un événement non négligeable.
L'application

$$P_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ A \mapsto P_B(A) \end{cases}$$

est une probabilté sur Ω.

Démonstration :

Proposition 6.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soient A et B sont deux événements tels que B est non négligeable. On a alors

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Proposition 7 (Conséquence : Formule des probabilités composées)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \times P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Exemple
Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges.
On tire successivement 3 boules sans remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?

Exercice 6
Une urne contient initialement 7 jetons blancs et 3 jetons rouges. On tire succéssivement trois jetons selon la règle suivante : si le jeton tiré est blanc, on le retire et on met un jeton rouge à la place, si le jeton tiré est rouge on le retire de l'urne. En notant B_i l'événement « le jeton tiré au i^e tirage est blanc », calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

Proposition 8 (Inversion des conditionnements)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soient A et B sont deux événements non négligeables.

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)}$$

III.2 Formule des probabilités totales

Proposition 9.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements chacun non négligeable. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B|A_i)$$

Démonstration :

Exemple
Trois urnes contiennent des jetons blancs et des jetons noirs. L'urne U_1 contient 3 jetons noirs et trois jetons blancs, l'urne U_2 contient 4 jetons blancs et 6 jetons noirs, et l'urne U_3 contient 1 jeton blanc et 3 jetons noirs. On choisit une urne au hasard puis on tire un jeton dans cette urne.
Déterminer la probabilité de tirer un jeton noir.

III.3 Formule de Bayes

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements chacun non négligeable.
Pour tout événement B non négligeable et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \times P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B|A_i)}$$

Démonstration :

III.4 Indépendance

Définition 11.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Deux événements A et B sont dits indépendants pour la probabilité P lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En particulier si $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A) = P_B(A)$.

Exemple
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte est un carreau »et B l'événement « la carte est un valet ». Montrer que les événements A et B sont indépendants.

Remarque :
Deux évènements incompatibles ne sont pas a priori indépendants, au contraire.

Proposition 10.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
Si A et B sont deux événements indépendants alors

1. A et $\overline{B}$ sont indépendants
2. $\overline{A}$ et B sont indépendants
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Démonstration :

Définition 12.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilité. Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$. On dit que les événements $A_i, \ldots A_n$ sont mutuellement indépendants si

$$\forall i_i, \ldots i_k \in [\![1, n]\!], P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \ldots P(A_{i_k})$$

Exemple *Situations classiques*
On lance plusieurs fois de suite un même dé ou une même pièce : les résultats des différents lancers sont mutuellement indépendants.
On effectue des tirages avec remise de boules dans une urne. Les résultats sont mutuellements indépendants.

Exemple
On lance un dé à huit faces, équilibré. On note A_1 l'événement obtenir 1, 2, 7 ou 8, A_2 l'événement obtenir 2, 3 , 6 ou 8 et A_3 l'événement obtenir 3,4,5 ou 8. Montrer que les événements A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Remarque :
Soient $A_1, \ldots A_n$ des événements mutuellement indépendants. Alors Les événements $\overline{A_1}, A_2, \ldots A_n$ le sont aussi.

Exemple
Une urne contient quatre jetons : un bleu, un blanc, un rouge et un tricolore (bleu blanc rouge)

— A « le jeton tiré contient du bleu »
— B « le jeton tiré contient du blanc »
— C « le jeton tiré contient du rouge »

— T « le jeton tiré est tricolore ».

Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellements indépendants ?

Remarque :
Attention !
L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

Exercice 7
On lance deux dés équilibrés, un rouge et un bleu. Soit A« le dé rouge donne un nombre pair », B« le dé bleu donne un nombre pair »et C « la somme des deux nombres obtenus est paire ». Etudier l'indépendance deux à deux ainsi que l'indépendance mutuelle de ces trois événements.