

Chapitre 21 : Séries numériques

I Généralités

I.1 Définitions

Définition 1 (Série numérique).

Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ réelle ou complexe. On appelle **série de la suite** (u_n) , la suite notée $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

La série des u_n est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$ fixé, le terme général S_n est appelé **somme partielle de la série au rang n** .

Remarque :

Liens fondamentaux : pour $n \geq n_0$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Définition 2 (Convergence et somme).

Lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ **converge**, sa limite s'appelle **somme de la série** et est notée

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Lorsque la suite (S_n) diverge, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge**.

Remarque :

- Il se peut que la suite (u_n) converge sans pour autant que la série $\sum u_n$ converge.
- Ne pas confondre les notations $\sum u_k$ (qui désigne une suite, qui peut converger ou non) et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ (qui désigne un nombre dans $\mathbb{K}$, la limite de la série).

Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence).

Soit $\sum u_k$ une série. On a :

$$\sum u_k \text{ converge} \implies \lim(u_n) = 0.$$

Idée de la démonstration :

On écrit la différence de sommes partielles consécutives $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Méthode 1 (Une façon de montrer qu'une série diverge).

On montre (u_n) ne converge pas vers 0.

 Exercice 1

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$

Remarque :

Attention la réciproque est FAUSSE : si (u_n) converge vers 0 alors on ne peut rien conclure quant à la nature de la série.

Par exemple la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Cette série harmonique est une bonne référence. Intuitivement il faut que la suite (u_n) tende vers 0 plus vite que la suite $\frac{1}{n}$ pour que la série converge.

Définition 3 (Divergence grossière).

Lorsque (u_n) est une suite qui ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_k$ **diverge grossièrement**.

Proposition 2 (Lien nature suite et série).

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ et la série télescopique $\sum_{k \geq n_0} (u_{k+1} - u_k)$ sont de même nature.

Une telle série $\sum_{k \geq n_0} (u_{k+1} - u_k)$ est dite **télescopique** et en cas de convergence, on sait calculer sa somme :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) - u_{n_0}.$$

Idée de la démonstration :

On calcule la somme partielle $\sum_{k=n_0}^n u_{k+1} - u_k$.

Remarque :

Les séries télescopiques ont le bon goût d'avoir une limite calculable (c'est simplement la limite de (u_n) moins le premier terme). C'est loin d'être le cas pour les autres séries. On dispose de nombreux critères pour montrer qu'une série converge ou diverge, mais en cas de convergence il est rare de pouvoir calculer la limite.

 Exercice 2

Etudier la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$

I.2 Propriétés des séries convergentes**Proposition 3** (Convergence d'une série à valeurs complexes).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs complexes. On a : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

En cas de convergence :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=n_0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_k).$$

Idée de la démonstration :

On écrit $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n_0}^n \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=n_0}^n \operatorname{Im}(u_k)$ et on sait qu'une suite à valeurs complexes converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent.

Définition 4 (Reste d'une série convergente).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente. On appelle **reste de la série au rang $n \geq n_0$** le nombre :

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - S_n = \dots$$

Proposition 4 (Suite des restes d'une série convergente).

Soit $\sum u_n$ une série. On a :

$$\sum u_k \text{ converge} \implies \lim(R_n) = 0.$$

Idée de la démonstration :

Application directe des deux définitions.

Remarque :

Attention le reste d'une série n'est défini que pour une série convergente.

Proposition 5 (L'ensemble des séries convergentes est un e.v.).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a : $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

Idée de la démonstration :

On écrit la linéarité pour les sommes partielles (finies) et on passe à la limite.

Remarque :

Retenir que :

- La somme de deux convergentes est convergente.
- La somme d'une convergente et d'une divergente est divergente.
- La somme de deux divergentes PEUT être convergente.

I.3 Exemples fondamentaux**Définition 5** (Séries géométriques).

Les séries de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$ sont appelées **séries géométriques**.

Théorème 1 (Convergence des séries géométriques).

Soit $q \in \mathbb{C}$. On a le critère de convergence suivant :

$$\sum q^n \text{ converge} \iff |q| < 1.$$

Et dans le cas de convergence on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n =$

Idée de la démonstration :

On calcule la somme partielle et on utilise le critère de convergence d'une suite géométrique.

Définition 6 (Séries de Riemann).

Les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont appelées **séries de Riemann**.

Exemple 1

Les séries $\sum n^2$, $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont des séries de Riemann.

Proposition 6 (Série harmonique).

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Idée de la démonstration :

On minore $S_{2n} - S_n$.

Théorème 2 (Règle de Riemann).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a le critère de convergence suivant :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

Idée de la démonstration :

A l'aide d'une comparaison série-intégrale (admis à ce stade).

Proposition 7 (Série exponentielle).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Idée de la démonstration :

Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt}$.

On applique la formule de Taylor entre 0 et 1 à la fonction $g : t \mapsto e^{tz}$.

Exercice 3

Montrer que la série $\sum \frac{5^k}{k!}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 4

Montrer que la série $\sum \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ converge et déterminer sa somme.

II Critères de convergence pour séries à termes positifs

Dans cette section les suites considérées (u_n) sont **positives**.

II.1 Croissance des sommes partielles

Proposition 8 (Croissance de (S_n)).

Si (u_n) est une suite **positive** alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante.

Idée de la démonstration :

On calcule $S_{n+1} - S_n$.

Théorème 3 (Convergence monotone des séries).

Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**. On a l'alternative suivante :

1. ou bien la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée et alors $\sum u_n$ converge et sa somme vaut
2. ou bien la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ n'est pas majorée et alors $\sum u_n$ diverge vers

Idée de la démonstration :

On applique le théorème de la limite monotone à la suite (S_n) .

II.2 Théorème de comparaison

Théorème 4 (Comparaison entre séries numériques).

Soit (u_n) et (v_n) deux suites **positives**. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Idée de la démonstration :

Dans le premier cas, on applique le théorème de convergence monotone $\sum u_n$ en utilisant la convergence de $\sum v_n$.
Pour le deuxième cas, on applique le théorème de minoration $\sum v_n$.

Méthode 2 (Comparaison avec Riemann).

Soit (u_n) est une suite **positive**.

- Si $\alpha > 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Idée :

Premier cas : il existe un rang à partir duquel $n^\alpha u_n \leq 1$.

Deuxième cas : il existe un rang à partir duquel $n^\alpha u_n \geq 1$.

Puis on applique le théorème de comparaison avec les séries de Riemann.

II.3 Règle de d'Alembert

Proposition 9 (Règle de d'Alembert).

Soit (u_n) une suite **positive**. On suppose que (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

- Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $L = 1$ alors on ne peut rien dire sur la nature de $\sum u_n$.

Idée de la démonstration :

Premier cas : il existe un rang à partir duquel $u_{n+1} \leq L' u_n$ où $L < L' < 1$.

Deuxième cas : il existe un rang à partir duquel $u_{n+1} \geq L' u_n$ où $L > L' > 1$.

Puis on compare (u_n) avec la suite géométrique $(L')^n$.

Méthode 3 (Appliquer la règle de d'Alembert).

Le calcul de la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est d'autant plus facile lorsque u_n est sous forme d'un produit et/ou de puissances.

Exemple 2

En appliquant la règle de d'Alembert pour les série à termes positifs, déterminer la nature des série suivantes :

1. $\sum \frac{n}{e^n}$
2. $\sum \frac{e^n}{n!}$
3. $\sum \frac{(n+1)^{2 \cdot 4^n}}{n!}$

II.4 Sommation de suites équivalentes

Théorème 5 (Critère de convergence pour des suites équivalentes).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites **positives** telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. On a :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}.$$

En cas de convergence, on a équivalence des restes : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

En cas de divergence, on a équivalence des sommes partielles : $\sum_{k=n_0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^n v_k$.

Idée de la démonstration :

Il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. Puis on applique le théorème de comparaison.

Remarque :

Le théorème est valable si les deux suites sont négatives. En revanche il est crucial que les suites soient de **signe constant**.

En effet pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$, on a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dont la série converge mais $\sum u_n$ diverge.

Proposition 10 (Corollaire : Lemme de Cesaro).

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. Si $\lim(u_n) = \ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) = \ell.$$

La suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)_{n \geq 1}$ est appelée **moyenne de Cesaro** de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Idée de la démonstration :

On applique le théorème précédent à la suite $(u_n + \lambda)$ où λ est choisi tel que $\ell + \lambda > 0$ et $u_n + \lambda > 0$ à partir d'un certain rang.

III Comparaison série-intégrale**Méthode 4** (Encadrer $\sum f(n)$ où f monotone).

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a pour $t \in [k, k+1]$,

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

— Par croissance de l'intégrale, on a :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

— En sommant de $k = 0$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

— En ajoutant les (éventuels) termes manquants :

$$\int_0^n f(t) dt + f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt + f(n).$$

Exemple 3

Montrer la convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 1$

Exemple 4

Donner un équivalent de S_n où S_n est la somme partielle de la série géométrique

Exemple 5

Donner un équivalent de S_n où S_n est la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$

Méthode 5 (Encadrer la suite des restes en cas de convergence).

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est décroissante et si $\sum f(n)$ converge.

— Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket n+1, N-1 \rrbracket$, on a pour $t \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

— Par croissance de l'intégrale, on a :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

— En sommant de $k = n+1$ à $k = N$:

$$\sum_{k=n+1}^N f(k+1) \leq \int_{n+1}^N f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N f(k)$$

— En ajoutant les (éventuels) termes manquants et avec $N \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{n+1}^N f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_n^{N-1} f(t) dt.$$

Exemple 6

Trouver un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{k^2}$

IV Critères de convergence pour séries quelconque**IV.1 Séries absolument convergentes****Définition 7** (Série absolument convergente).

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série (réelle ou complexe). On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ **converge absolument** si la série à termes positifs

$\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge (où $|u_n|$ désigne la valeur absolue ou le module de u_n).

Dans ce cas, on dit aussi que (u_n) **est sommable** et on peut noter $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Exemple 7

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, $\sum \frac{\sin(k)}{k^3}$ converge absolument,

Proposition 11 (Convergence absolue entraîne convergence).

On a :

$$\sum_{n \geq n_0} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Et en cas de convergence,

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Idée de la démonstration :

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère les parties positives et négatives de u_n .

Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on utilise $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ et on utilise le cas réel.

Remarque :

- En passant aux valeurs absolues (ou modules), tous les théorèmes de la section II. s'appliquent.
- Attention la réciproque est fautive : la convergence n'implique pas la convergence absolue. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas absolument.

IV.2 Domination et négligeabilité**Proposition 12** (Critère de convergence par domination ou négligeabilité).

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite (réelle ou complexe) et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle positive telles que $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$. On a :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge absolument} \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

En cas de convergence, on a domination (ou négligeabilité) des restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

En cas de divergence, on a domination (ou négligeabilité) des sommes partielles :

$$\sum_{k=n_0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n_0}^n v_k\right).$$

Idée de la démonstration :

On écrit la définition d'une suite dominée et on applique le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Exemple 8

Montrer la convergence de $\sum u_n$ où $u_n = \exp(-\sqrt{n})$

IV.3 Séries alternées**Définition 8** (Série alternée).

La série $\sum u_n$ est alternée s'il vérifie l'une des propriétés (équivalentes) suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}u_n < 0$;
- s'il existe une suite (a_n) à termes de signe constant telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$.

Théorème 6 (Critère spécial des série alternée).

Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si $(|u_n|)$ converge en décroissant vers 0 alors $\sum u_n$ converge.

Idée de la démonstration :

On montre que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Remarque :

Cela fournit un grand nombre de séries convergentes et non absolument convergentes. Par exemple pour tout $\alpha > 0$, on a $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent.

Proposition 13 (Propriétés d'une série alternée convergente).

Si $\sum u_n$ est une série alternée convergente alors en notant R_n le reste à l'ordre n , on a :

1. $|R_n| \leq |u_{n+1}|$;
2. R_n est du signe de son premier terme u_{n+1} .

Idée de la démonstration :

Tout découle du fait que $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

IV.4 Produit de Cauchy de deux séries**Définition 9** (Produit de Cauchy).

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries, la série $\sum w_n$ où pour tout $n \geq 0$:

$$w_n = \sum_{p,q \in \llbracket 0, n \rrbracket, p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

Théorème 7 (Convergence du produit de Cauchy).

Si $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum v_n$ est convergente alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Idée de la démonstration :

Admis à ce stade.

Remarque :

• Dans le cas où les suites (u_n) et (v_n) sont nulles à partir d'un certain rang, on retrouve la formule du produit de deux polynômes dont les coefficients sont respectivement les u_n et les v_n .

• Partant de la relation $e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$, on peut établir la propriété classique $e^a e^b = e^{a+b}$ grâce au produit de Cauchy.

- On peut avoir une série convergente et une série non absolument convergente dont le produit de Cauchy diverge.
- On peut avoir une série convergente et une série divergente dont le produit de Cauchy converge.
- On peut avoir deux séries divergentes dont le produit de Cauchy converge.

V Annexes : Des valeurs de sommes très classiques

$$- \forall x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

$$- \forall x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$- \forall x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$- \forall x \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$