Chapitre 8 : Suites de nombres réels

I Généralités

I.1 Définition

Définition 1 (Suite réelle).

On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'image de n par u.
La suite est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque :
On appelle aussi suite réelle toute application de $[\![n_0;+\infty[\![$ (où $n_0 > 0$) dans $\mathbb{R}$. Mais on ne traitera dans ce cours que des suites définie sur $\mathbb{N}$. On adaptera les définitions aux suites définies à partir d'un certain rang n_0.

I.2 Modes de définition d'une suite

Définition 2 (Suite définie de manière explicite).

On dit que u est définie de manière **explicite** lorsque : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'exprime en fonction de n
La représentation graphique est alors le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\{(n, u_n); n \in \mathbb{N}\}$$

✍ **Exemple 1**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \binom{n}{3}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \ln(n) + 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \exp(n) - 2n$.

✎ **Exercice 1**
Réprésenter graphiquement les suites u définies par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2}n + 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$w_n = \sqrt{n-1}$$

Définition 3 (Suite définie par récurrence).

On dit que u est définie **par récurrence** s'il existe une fonction f à valeurs réelles telle que :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \text{ (donné)} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On représente alors souvent u en positionnant les termes de la suite sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$ et de $\mathcal{C}_f$.

Remarque :
La fonction f est appelée fonction itérative de la suite

✍ **Exemple 2**
Réprésenter graphiquement les suites suivantes :

1. u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$.
2. u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
3. u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$.
4. v la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 2)$.

✍ **Exemple 3**
Il n'existe pas de suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$.

Remarque :
Pour montrer que la suite u est bien définie il faut montrer que $\mathrm{u}_0 appartient à un intervalle de \mathrm{D}_f$ qui est stable par f

Définition 4 (Intervalle stable par une fonction)**.**

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On dit que I est stable par f si

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I$$

Autrement dit $f(I) \subset I$

✎ **Exercice 2** *Passer d'une représentation à l'autre (quand on peut !)*
Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + n + 1$
2. $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$

II Suites particulières

II.1 Suites géométriques, arithmétiques

Définition 5 (Suite arithmétique)**.**

Une suite u est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé raison de la suite u

Méthode 1 (Montrer qu'une suite est arithmétique)**.**

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que ce nombre ne dépend pas de n.

Proposition 1 (Expression explicite d'une suite arithmétique)**.**

Si u est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ldots\ldots\ldots$$

Proposition 2 (Expression explicite d'une suite arithmétique).

Si u est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_p + \dots\dots$$

Définition 6 (Suite géométrique).

Une suite u est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

Le réel q est appelé raison de la suite u

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est géométrique).

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut, après s'être assuré que ce quotient était bien défini, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que ce nombre ne dépend pas de n.

Proposition 3 (Expression explicite d'une suite géométrique).

Si u est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \dots\dots\dots$$

Proposition 4 (Expression explicite d'une suite géométrique).

Si u est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_p \times \dots\dots$$

✎ **Exercice 3**

Déterminer la nature des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2 + u_n$.
2. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n$.
3. $u_n = 2^{2n}$.
4. $u_n = 2 \times \frac{1}{2^{2n}}$.
5. $u_n = 5 \times 3^{3n+1}$.
6. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 6$.
7. $u_n = 3^{2n+1}$.
8. $u_n = 4 + 6n$
9. $u_n = \frac{6 \times 3^n}{5^{2n+1}}$
10. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + 6$

II.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 7 (Suite arithmético-géométrique).

On dit que u est arithmético-géométrique s'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque :
La fonction itérative est $f : x \mapsto ax + b$

Proposition 5 (Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique)**.**

Soit u une suite arithmético-géométrique et $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Soit α la solution à l'équation $\alpha = a\alpha + b$.
La suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a.

Remarque :
Le réel α est un **point fixe** de la fonction itérative

Méthode 3 (Trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$)**.**

1. On résout l'équation $\alpha = a\alpha + b$
   ie on trouve le point fixe de la fonction $f : x \mapsto ax + b$
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$
3. On montre que v est géométrique de raison a
4. On en déduit l'expression explicite de v_n en fonction de n
5. On en déduit l'expression explicite de u_n en fonction de n

✍ **Exemple 4**

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Calculer u_n et $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

✎ **Exercice 4**

1. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 6 \end{cases}$

   Calculer u_n et $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

   Calculer u_n et $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

II.3 Suite récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \text{ (donné)} \\ u_1 \in \mathbb{R} \text{ (donné)} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$

✍ **Exemple 5**
La suite de Fibonacci définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Méthode 4 (Trouver l'expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**

Soit u une suite définie par ses deux premiers termes ainsi que la relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note E_c l'**équation caractéristique** associé à cette suite.

$$(E_c) : r^2 - ar - b = 0$$

1. On calcule le discriminant Δ de cette équation caractéristique
2. (a) Si $\Delta > 0$ on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (E_c) et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

   (b) Si $\Delta = 0$ on note r_0 la racine réelle double de (E_c) et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n) r_0^n$$

   (c) Si $\Delta < 0$ l'équation (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))$$

3. On détermine λ_1 et λ_2 grâce à u_0 et u_1

✎ **Exercice 5**

1. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

   Exprimer u_n en fonction de n.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$

   Exprimer u_n en fonction de n.

III Opérations sur les suites

Définition 9 (Somme et produit de suites)**.**

Si u et v sont deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit les suites

$$u + v : n \mapsto u_n + v_n$$

$$u \times v : n \mapsto u_n \times v_n$$

$$\lambda u : n \mapsto \lambda u_n$$

Définition 10 (Suite extraite).

Soit u une suite. On appelle **suite extraite** de u toute suite du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque :
La fonction φ est appelée fonction extractrice ou exctraction

✎ **Exercice 6**
Soit φ une extraction. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$$

✍ **Exemple 6**
Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes de rangs pairs et de rangs impairs.

✍ **Exemple 7**
La suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u.

✍ **Exemple 8**
Si $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on peut considérer l'extraction u_{p^n} qui ne prend que les indices qui sont des puissances de p

✎ **Exercice 7**
Soit u la suite définie par $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.
Déterminer les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

Méthode 5 (Appréhender une suite extraite).

Pour bien comprendre une suite extraite, lui donner un nom. Par exemple poser $v_n = u_{\varphi(n)}$ puis calculer les premiers termes v_0, v_1,... jusqu'à bien comprendre. On peut ensuite étudier la monotonie (étude du signe de $v_{n+1} - v_n$) et d'autres propriétés...

✎ **Exercice 8**
Etudier la suite extraite $u_{\varphi(n)}$ où $u_n = 2n$ et $\varphi(n) = n!$.

✎ **Exercice 9** *Devinette*
On considère la suite extraite (d'exctraction ψ) d'une suite extraite (d'exctraction φ) d'une suite u. La suite obtenue est-elle $u_{\varphi\circ\psi}$ ou $u_{\psi\circ\varphi}$?

IV Monotonie

IV.1 Définition

Définition 11 (Suite croissante).

On dit que u est **croissante** (respectivement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$)

Définition 12 (Suite monotone).

On dit que u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Définition 13 (Suite constante).

On dit que u est **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque :
Cela est équivalent à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.
Si une suite est constante à partir d'un certain rang, on dit qu'elle est stationnaire.

Définition 14 (Suite strictement croissante)**.**

On dit que u est **strictement croissante** (respectivement strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$)

✍ **Exemple 9**
La suite définie par $u_n = n$ est strictement croissante.
La suite u définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante.
La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.

Définition 15 (Suite strictement monotone)**.**

On dit que u est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

IV.2 Méthodes pour étudier la monotonie éventuelle

Méthode 6 (Méthode qui fonctionne toujours)**.**

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

✎ **Exercice 10**
Etudier la monotonie de la suite u définie par $u_n = 2n + \sin(n)$.
Etudier la monotonie de la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$.
Etudier la monotonie de la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
Etudier la monotonie de la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Méthode 7 (Si u est définie de manière explicite par une fonction de n)**.**

S'il existe une fonction $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ Etudier le sens de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Si f est croissante sur $[0; +\infty[$ (resp. strictement croissante) alors u est croissante (resp. strictement croissante).
Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ (resp. strictement décroissante) alors u est décroissante (resp. strictement décroissante).

✎ **Exercice 11**
Etudier la monotonie de u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2n$.
Etudier la monotonie de u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$.
Etudier la monotonie de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{e^n}{n}$

Remarque :
La réciproque est fausse. Exemple : $f(x) = x \times \cos(2\pi x)$ La suite définie par $u_n = f(n)$ est strictement croissante mais f n'est pas monotone !

Remarque :
Attention : ne pas confondre avec l'étude de la monotonie des suites définies par récurrence ! Dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut avoir f croissante mais u décroissante !!

Méthode 8 (Si la suite est **strictement positive**).

Si la suite est **strictement positive**, étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

✍ **Exemple 10**
Etudier la monotonie de la suite v définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$.
Etudier la monotonie de la suite v définie par $v_n = \frac{2^n}{n!}$

✎ **Exercice 12**
Etudier par la méthode de votre choix la monotonie de la suite dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $u_n = (-1)^n + n$
2. $u_n = 2n - 1$
3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. $u_n = \frac{-3}{2^n}$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
6. $u_n = (-1)^n$
7. $u_n = 3n - 1$
8. $u_n = 2^n$
9. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
10. $u_n = n^2 - 4n - 1$
11. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$
12. $u_n = n + \cos(n)$
13. $u_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3}$
14. $u_n = \cos\left(\frac{3}{n}\right)$

Proposition 6 (Si u est définie par récurrence).

Soit u une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ où I est stable par f
Si $\forall x \in I, f(x) \geq x$ alors u est croissante .
Si $\forall x \in I, f(x) \leq x$ alors u est décroissante .

Proposition 7 (Si u est définie par récurrence et que la fonction itérative est croissante).

Soit u une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante alors u est monotone (croissante si $u_1 \geq u_0$ et décroissante sinon). Si f est décroissante alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de monotonie contraires (à déterminer en comparant u_0 et u_2 pour (u_{2n}) puis u_1 et u_3 pour (u_{2n+1})) et u n'est pas monotone.

Méthode 9 (Si u est définie par récurrence).

Si u est définie par récurrence on peut

— Prouver que f est croissante sur I et comparer u_0 et u_1.
OU

— Prouver que $\forall x \in I, f(x) \geq x$ ou $\forall x \in I, f(x) \leq x$

✍ **Exemple 11**
Etudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Etudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

✎ **Exercice 13**
Etudier la monotonie des suites définies par récurrence de la manière de votre choix :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$
2. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
3. $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ et $u_0 > 0$
4. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 4$
5. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$

IV.3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 16 (Suite majorée, minorée, bornée)**.**

On dit qu'une suite u est :

1. **Majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Un tel réel M est un majorant de u.
2. **Minorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Un tel réel m est un minorant de u.
3. **Bornée** si elle est majorée et minorée.

✎ **Exercice 14**
Les suites suivantes sont-elle majorées ? minorées ?
$u_n = n^2$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = 2^n$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

✎ **Exercice 15**
Montrer qu'une suite croissante est minorée et trouver un minorant.
Montrer qu'une suite décroissante est majorée et trouver un majorant.

Proposition 8 (CNS de bornitude)**.**

Une suite u est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M$$

✍ **Exemple 12**
Montrer que la suite définie par $u_n = (-1)^n \frac{3n^2}{n^2+1}$ est bornée.
Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n+1} - 2\cos(n)$ est bornée.

✎ **Exercice 16**
Dire si les suites suivantes sont bornées

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
2. $u_n = (-2)^n$
3. $u_n = (-1)^n \sin(n) + 2\cos(n)$
4. $u_n = 2n$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+2}{n^2}$
6. $u_n = e^{\frac{2}{n}}$
7. $u_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{n}}$
8. $u_n = \frac{2n-3}{5n+1}$
9. $v_n = \frac{n\sin(n)}{1+n^2}$
10. $w_n = n\sin(n)$
11. $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

V Limites de suites

On notera parfois $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

V.1 Définition

Définition 17 (Limite de suite)**.**

Soit u une suite.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que u admet pour limite l si :
$$(\forall \epsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$
2. On dit que u admet pour limite $+\infty$ si :
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
3. On dit que u admet pour limite $-\infty$ si :
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

✍ **Exemple 13**
La suite définie par $u_n = n$ admet pour limite $+\infty$.
La suite définie par $u_n = 4n$ admet pour limite $+\infty$.
La suite définie par $u_n = \sqrt{n}$ admet pour limite $+\infty$.
La suite définie par e^{-n} admet pour limite 0.
La suite définie par $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ admet pour limite 0

Définition 18 (Suite convergente)**.**

On dit qu'une suite est **convergente** lorsqu'elle possède une limite **finie**. On dit qu'elle est **divergente** dans le cas contraire (c'est-à-dire lorsqu'elle n'admet pas de limite ou qu'elle admet $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite).

Proposition 9 (Unicité de la limite)**.**

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède une limite alors celle ci est **unique**. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Remarque :
Si u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors $|u|$ tend vers $|l|$.
La réciproque est fausse.
Ex : $(-1)^n$.
En revanche u tend vers 0 si et seulement si $|u|$ tend vers 0.

Proposition 10 (Equivalence entre la convergence de la valeur absolue vers 0 et la convergence de la suite vers 0)**.**

Soit u une suite et $l \in \mathbb{R}$.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n - l = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$$

✍ **Exemple 14**
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$.

V.2 Propriétés des suites admettant une limite

Proposition 11 (Bornitude des suites convergentes)**.**

Toute suite convergente est bornée.

Remarque :
La réciproque est fausse. Ex : $(-1)^n$.

Proposition 12 (Caractère majoré/minoré des suites divergant vers l'infini)**.**

Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.
Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Proposition 13 (Cas d'une limite strictement positive)**.**

Si u converge vers une limite $l > 0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, u_n > 0$$

Proposition 14 (Passage à la limite dans une inégalité)**.**

Soient u et v deux suites convergeant respectivement vers l et l'.

1. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$
2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$, alors $l \leq M$
3. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq m$, alors $l \geq m$

Remarque :
Attention le passsage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Exemple $u_n = \frac{1}{n}$.

Proposition 15 (Limite des suites extraites de rangs pairs et impairs)**.**

Soit u une suite.
Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite u possède une limite et sa limite est la limite commune de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Proposition 16 (Limite des suites extraites)**.**

Soit u une suite admettant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Toute suite extraite de u admet aussi pour limite l.

Méthode 10 (Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite)**.**

On exhibe deux suite extraites qui convergent vers deux limites différentes.

✍ **Exemple 15**
Montrer que $((-1)^n)$ diverge

✍ **Exemple 16**
Montrer que $(\sin(n))$ et $(\cos(n))$ divergent.

V.3 Limites classiques

Proposition 17 (Comportement asymptotique des suites géométriques selon la raison)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$
2. Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$
3. Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$
4. Si $a < -1$, alors la suite (a^n) n'admet pas de limite.

✎ **Exercice 17**
Soit $a \in]-1; 1[$. Déterminer la limite de a^{2n}.

Proposition 18 (Suites géométriques selon la raison, extension aux suite à valeurs complexes)**.**

Soit $a \in \mathbb{C}$.
On a (a^n) converge ssi ($|a| < 1$ ou $a = 1$)

V.4 Opérations sur les limites

Proposition 19 (Limite d'une somme)**.**

Soient u et v deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Le tableau suivant nous dit si la limite de $u+v$ existe et nous la donne le cas échéant.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u+v)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Proposition 20 (Limite d'un produit)**.**

Soient u et v deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Le tableau suivant nous dit si la limite de $u \times v$ existe et nous la donne le cas échéant. On trouve les signes des ∞ grâce à la règle des signes.

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	∞
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	∞	∞
$\lim(u \times v)$	ll'	∞	?	∞

Proposition 21 (Limite de l'inverse)**.**

Soient u une suite admettant une limite (finie ou infinie). La limite de $\frac{1}{u}$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\lim u$	$l \neq 0$	0^+	0^-	∞
$\lim \dfrac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque :
ATTENTION ! si u tend vers 0 mais en changeant de signe, $\frac{1}{u}$ n'a pas de limite (elle admet une sous suite qui tend vers $+\infty$ et une autre qui tend vers $-\infty$. Par exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0 mais $\frac{1}{u_n}$ n'admet pas de limite.

La limite d'un quotient se déduit des tableaux donnant la limite d'un produit et de l'inverse puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$:

Proposition 22 (Limite d'un quotient).

$\lim u$	$l \in \mathbb{R}$	l	l ou ∞	l ou ∞	0	∞	∞
$\lim v$	$l' \in \mathbb{R}^*$	∞	0^+	$0-$	0	∞	$l \neq 0$
$\lim \frac{u}{v}$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	?	?	∞

✎ **Exercice 18**
Déterminer si les limites suivantes existent puis trouver leur valeur (le cas échéant) :
1. $u_n = 3n^2 + \sqrt{n} - 7$
2. $v_n = 2n^2 - 3n + 5$
3. $w_n = \sqrt{n}(3n^2 - 7)$
4. $z_n = \frac{1}{n}(5n^2 + 1)$
5. $k_n = \frac{0{,}6^n}{0{,}5^n}$
6. $u_n = \frac{2n^2-4n+5}{8n^3-3n^2+15n}$
7. $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
8. $u_n = \frac{1}{(-1)^n \sin(\frac{1}{n})}$

Proposition 23 (Limite d'une composée par une fonction).

Soit u une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et une fonction de limite L en l. La suite $(f(u_n))$ admet L pour limite.
En particulier si f est continue en $l \in \mathbb{R}$ et que $u_n \to l$ alors $f(u_n) \to f(l)$.

✎ **Exercice 19**
Trouver les limites suivantes :
1. $u_n = e^{-n^2}$
2. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \sqrt{n+1}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Proposition 24 (Conséquence : un théorème de point fixe).

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I stable par f contenant u_0.
Si u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $f(l) = l$.

✍ **Exemple 17**
Déterminer les limites possibles pour les suites definies par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $v_{n+1} = v_n^2 - 5v_n + 1$, $v_{n+1} = \sin(v_n)$

VI Théorèmes d'existence d'une limite

Théorème 1 (Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes).

Soient u, v et w trois suites et $l \in \mathbb{R}$. Si u et w sont telles que

1. $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
2. u et w ont pour limite l.

Alors v est convergente et a pour limite l.

✎ **Exercice 20**
$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^3} + 3$

✎ **Exercice 21**
Soit u une suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$$

Montrer que u converge et donner sa limite.

Proposition 25 (Produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0).

Si $u = v \times \epsilon$ avec $\lim \epsilon_n = 0$ et v une suite bornée alors

$$\lim u_n = 0$$

Proposition 26 (Majoration de $|u_n - l|$ par une suite qui tend vers 0).

Soit u une suite et (ϵ_n) une suite qui tend vers 0.
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq \epsilon_n$ alors u converge vers l.

✍ **Exemple 18**
$u_n = \frac{5\cos(n^2) - 6\sin(e^n)}{\sqrt{n}}$

Méthode 11.

Pour montrer qu'une suite tend vers 0 on majore $|u_n|$ par une suite qui tend vers 0.
Pour montrer que u_n tend vers l, on majore $|u_n - l|$ par une suite qui tend vers 0.

✎ **Exercice 22**
Déterminer la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{\sin(n) - 2\cos(n)}{n}$

✎ **Exercice 23**
Montrer que la suite $\frac{\sin(2n) + \cos(n) + n^2}{n^2}$ converge vers 1.

✎ **Exercice 24**
Déterminer la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{2n^2 - \cos(n)}{n^2 - n + 8}$

Théorème 2 (Théorèmes de minoration).

Soient u, v sont deux suites telles que

1. $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
2. u diverge vers $+\infty$.

Alors v diverge vers $+\infty$.

✍ **Exemple 19**
Montrer que $n!$ admet pour limite $+\infty$.

Théorème 3 (Théorème de minoration).

Soient u, v sont deux suites telles que

1. $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
2. v diverge vers $-\infty$.

Alors u diverge vers $-\infty$.

VI.1 Théorèmes de la limite monotone

Théorème 4 (Théorème de la limite monotone).

Soit u une suite croissante de nombre réels.

— Si u est majorée alors elle est convergente (et sa limite est sa borne supérieure).

— Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$

Toute suite croissante et majorée converge

✍ **Exemple 20**
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
Montrer que la suite u est majorée par 4 puis montrer que u est convergente.

Théorème 5 (Théorème de la limite monotone version décroissante).

Soit u une suite décroissante de nombre réels.

— Si u est minorée alors elle est convergente (et sa limite est sa borne inférieure).

— Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $+\infty$

Toute suite décroissante et minorée converge

✎ **Exercice 25**
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Proposition 27 (Suite dont les suites extraites de rangs pairs et impairs comvergent vers une même limite).

Soit u une suite telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ admettent pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors u admet également pour limite l.

✍ **Exemple 21**
On définit une suite par $u_{2n} = \frac{2n+3}{4n}$ et $u_{2n+1} = \frac{n-5}{2n+1}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\frac{1}{2}$

VI.2 Théorème des suites adjacentes

Définition 19 (Suite adjacentes).

Deux suites u et v sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

✍ **Exemple 22**
Montrer que les suites u et v définies par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ et $v_n = \frac{2^{n+1}+3}{2^n}$ sont adjacentes

Proposition 28 (Lemme des suites adjacentes).

Si u et v sont adjacentes avec u croissante et v décroissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 6 (Théorème des suites adjacentes).

Si u et v sont deux suites adjacentes alors u et v convergent et ont même limite.

✍ **Exemple 23**
Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes et en déduire qu'elles convergent vers une même limite.
Remarque : cette limite vaut e

✍ **Exemple 24**
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

✎ **Exercice 26**
Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos(k\pi)}{k^2 \ln(k)}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

✎ **Exercice 27**
Soient $0 < a < b$ et (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
Prouver que u et v sont adjacentes.

✎ **Exercice 28**
Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - n$
3. $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2+2n-1}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+3}$
5. $\lim_{n\to+\infty} 2^n$
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-3^n}{3^n-4^n}$
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1}$
8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{4}$
9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$
10. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

✎ **Exercice 29**
Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
Montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente. Indication : monter qu'elle est croissante et majorée.

✎ **Exercice 30**
Soit u_n une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2^n}$
2. Quel est le sens de variation de v ?
3. Majorer la quantité $v_{n+1} - v_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0 + 2$.
5. Montrer que la suite v est convergente.
6. En déduire que la suite u est convergente.

VII Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute cette partie, on étudie une suite u une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur I laissant stable l'intervalle I.

VII.1 Etape 1 (incontournable) : Montrer que la suite est bien définie

✍ **Exemple 25**
Les suites suivantes sont-elles bien définies ?

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{v_n - 1} \end{cases}$$

Définition 20.

On dit que I est un intervalle stable par f si $f(I) \subset I$.

✍ **Exemple 26**
Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$
Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction $x \mapsto x - x^2$.

Proposition 29.

Si $I \subset \mathcal{D}_f$ est stable par f et que $u_0 \in I$ alors (u_n) est bien définie.

✍ **Exemple 27**

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = v_n - v_n^2 \end{cases}$$

✎ **Exercice 31**
Soit w la suite définie par

$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{w_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que la suite w est bien définie.

Remarque :
Il est judicieux de déterminer un ensemble I le plus petit possible car cet intervalle contenant tous les termes de la suites, il peut nous permettre de montrer par exemple que la suite est bornée, ce qui sera très utile dans l'étude de la convergence.

✎ **Exercice 32**
Soit z la suite définie par

$$\begin{cases} z_0 = 1,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \sqrt{2 - z_n} \end{cases}$$

Montrer que z est bien définie et bornée.

Remarque :
Il est également possible de montrer par exemple que u_1 existe puis de trouver un intervalle de $\mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_1.

VII.2 Etape 2 : Etude de la monotonie : escaliers, escargots et compagnie

Proposition 30 (Rappel)**.**

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0. Si f est croissante sur I alors u est monotone.

Méthode 12.

Si la suite f est croissante, on trouve les variations de u en comparant u_0 et u_1.
- Si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$
- Si $u_0 \geq u_1$, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$

✎ **Exercice 33**
Etudier la monotonie de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 0$.

✎ **Exercice 34**
Etudier la monotonie de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ selon la valeur de u_0.

Proposition 31 (Monotonie des suites extraites de rang pairs et impairs dans le cas où f est décroissante)**.**

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0. Si f est décroissante sur I alors que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.

✎ **Exercice 35**
Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}$.
Etudier la monotonie des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Proposition 32 (Etude du signe de $f(x) - x$)**.**

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \leq 0$ alors u est décroissante. Si pour tout $x \in I$, $f(x) - x \geq 0$ alors u est croissante

✎ **Exercice 36**
Soit v la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$. Montrer que la suite est bien définie puis étudier sa monotonie.

VII.3 Etape 3 : Etude de la convergence

Proposition 33 (Rappel du théorème de point fixe)**.**

Soit u une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et contenant u_0.
Supposons que f est continue sur I.
Si la suite u converge alors sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$.

✎ **Exercice 37**
Soit u la suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite u est bien définie.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Remarque :
Si la fonction f n'a pas de point fixe alors on est assuré que la suite u diverge.

✎ **Exercice 38**
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode 13.

Si u est monotone on essaie d'appliquer le théorème de convergence monotone pour l'existence de la limite puis on détermine la limite en étudiant les points fixes de f. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et on peut essayer de montrer qu'elles convergent.

✎ **Exercice 39**
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

VII.4 Cas des applications contractantes

Définition 21 (Application Lipschitzienne)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ On dit que f est k-lipschitzienne sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Définition 22 (Application contractante)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est contractante sur I s'il existe un réel $k \in]0;1[$ tel que f est k-lipschitzienne.

Remarque :
Si la fonction itérative est contractante et admet un point fixe l, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

✎ **Exercice 40**
Soit u définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [0;+\infty[\end{cases}$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$

1. Montrer que u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;+\infty[$
2. Montrer que la fonction itérative admet un point fixe l.
3. Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|f'(x)| \leq k$
4. On admet qu'on peut en déduire :
$$\forall (a,b) \in [0;+\infty[^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$$
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$
6. En déduire que u converge et trouver sa limite.

VII.5 Exercices bilan

✎ **Exercice 41**
Soit u_n la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement u.
2. Montrer que la suite u est bien définie.
3. Etudier le sens de variation de u.
4. Montrer que u est majorée par 2.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$
7. Conclure

✎ **Exercice 42**
Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Représenter sur un graphique les premier termes de u sur l'axe des abscisses.
2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par cos et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
3. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
4. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et possèdent la même limite.
5. Que peut-on en déduire quant à u ?

VIII Comparaison de suites, analyse asymptotique

Dans tout cette partie u et v sont deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

VIII.1 Equivalence

VIII.1.1 Définition

Définition 23 (Suites équivalentes).

On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Notation : $u_n \sim v_n$.

✎ **Exercice 43**
Montrer que

1. $n \sim n+3$ 2. $\frac{1}{n} + 2 \sim 2$ 3. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
4. $n + \ln(n) \sim n$ 5. $\sqrt{n^2+1} \sim n$ 6. $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$

Remarque :
Par convention, une suite équivalente à $(0)_n$ est une suite nulle à partir d'un certain rang. Si, lors d'un exercice, vous trouvez une suite équivalente à $(0)_n$ c'est certainement que vous vous êtes trompé dans votre calcul.

Remarque :
On a :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0} \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

VIII.1.2 Propriétés

Proposition 34 (Signe)**.**

Si u et v sont équivalentes et que $v_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Si u et v sont équivalentes et que $v_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition 35 (Limite)**.**

Soit u et v deux suites équivalentes. Si v admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors u aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Remarque :
La réciproque est fausse car deux suite qui admettent $+\infty$ pour limites ne sont pas forcément équivalentes.

Proposition 36 (Suite équivalente à sa limite (finie))**.**

Soit $L \in \mathbb{R}^*$ et u une suite. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow u_n \sim L$$

✍ **Exemple 28**
$\lim\limits_{n\to+\infty} \arccos\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\arccos(\frac{1}{n}) \sim \frac{\pi}{2}$

Remarque :
Ce résultat est **faux** si $l = 0$. Par exemple, la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$ est une suite qui tend vers 0 mais elle n'est pas équivalente à 0 (car une suite équivalente à 0 est nulle à partir d'un certain rang).

VIII.1.3 Equivalents à connaître

Proposition 37 (Equivalent d'une suite polynômiale)**.**

Soit u une suite telle que $u_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0$. Alors $u_n \sim a_p n^p$.

✍ **Exemple 29**
Un équivalent simple de $n^{15} - 3n^6 + 2n - 7$ est n^{15}

✎ **Exercice 44**
Donner de même un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - 1$
2. $u_n = \frac{1}{2}n^9 - 30n^2 + 2$
3. $u_n = n^2 - 1 + n^4$
4. $u_n = \frac{1}{10^3}n^5 - 10^{12}n + 2n$

Proposition 38 (Equivalents classiques, approximation des petits angles)**.**

Soit u une suite **qui tend vers** 0 et telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On a :

1. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
2. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
4. $\sin(u_n) \sim u_n$
5. $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$
6. $\tan(u_n) \sim u_n$
7. $\arcsin(u_n) \sim u_n$
8. $\arctan(u_n) \sim u_n$

✎ **Exercice 45**
Démontrer cette proposition.
Indice : utiliser des taux d'accroissement comme dans l'exemple suivant.
Exemple :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} &= \exp'(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

(taux d'accroissement de exp en 0) donc, par composition des limites, si u_n tend vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{u_n}-1}{u_n}=1$$

On en déduit

$$e^{u_n}-1\sim u_n$$

✍ **Exemple 30**
Si $\lim u_n=0$,

$$\sqrt{1+u_n}-1\sim\frac{1}{2}u_n$$

Remarque :
Attention ! ! ! !
Les équivalents de référence ci-dessus ne sont valables que pour une suite qui tend vers 0.

✎ **Exercice 46**
Donner, en justifiant, un équivalent simple des suites de terme général :

1. e^n-n
2. $\frac{e^n-1}{n}$
3. $\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$
4. $\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)}-1$
5. $e^{\ln(1+\frac{1}{n})}-1$
6. $e^{5n^2}+n-3$
7. $\cos(\frac{1}{n^3})-1$
8. $\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1$

VIII.1.4 Opérations et équivalence

Proposition 39 (Opération et équivalence)**.**

Soient u, v, a, b des suites

1. Si $u_n\sim v_n$ alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\lambda u_n\sim\lambda v_n$
2. Si $u_n\sim v_n$ alors pour toute suite w, $w_nu_n\sim w_nv_n$
3. Si $u_n\sim a_n$ et $v_n\sim b_n$ alors $u_nv_n\sim a_nb_n$.
4. Si $u_n\sim a_n$ et $v_n\sim b_n$ et que (v_n) et (b_n) sont non nulles à partir d'un certains rang alors $\frac{u_n}{v_n}\sim\frac{a_n}{b_n}$.
5. Si $u_n\sim v_n$ et $u_n>0$ à partir d'un certain rang alors pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $u_n^\alpha\sim v_n^\alpha$.

✍ **Exemple 31**
Avec $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$$

donc

$$\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\sim\sqrt{\frac{1}{n}}$$

✎ **Exercice 47**
Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

1. $(n^3+1)(e^{\frac{1}{n}}-1)$
2. $\frac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$
3. $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$
4. $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\frac{5}{2}}$

Remarque :
Attention !!!
La puissance α doit obligatoirement être indépendante de n.
Par exemple, $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$ mais on n'a pas $(e^{\frac{1}{n}})^n \sim 1^n$

Remarque :

Attention !!!!!!

On n'additionne pas les équivalents !!

Exemple 32
Soient u, r, v et s les suites définies par $u_n = n^2$, $r_n = -n^2 + n$, $v_n = (n+1)^2$ et $s_n = -n^2 + 3n$.
On a $u_n \sim v_n$ et $r_n \sim s_n$ mais $\frac{u_n + r_n}{v_n + s_n} \to \frac{1}{5}$ donc $u + r$ n'est pas équivalent à $v + s$.

Exercice 48
Donner, en justifiant, un équivalent simple des suites de terme général :

1. $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$ 2. $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 3. $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1$ 4. $e^{\frac{1}{n^2}} - 1$

5. $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 6. $\sin\left(e^{-n}\right)$ 7. $e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$

Exercice 49
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
3. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
4. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

VIII.2 Domination

Définition 24 (Suite dominée par une autre).

Soit u et v deux suites.
On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est une suite bornée.
Notation : $u_n = O(v_n)$.

Exemple 33
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{3n^4+1}{n^4} &= 3 + \frac{1}{n^4} \\ &\leq 4 \end{aligned}$$

donc

$$3n^4 + 1 = O(n^4)$$

Exemple 34
On a $\lim \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ est bornée donc

$$\ln(n) = O(n)$$

Remarque :
(u_n) bornée $\Leftrightarrow u_n = O(1)$

Exemple 35
$(\sin(n))$ est bornée donc $\sin(n) = O(1)$

Exercice 50
Montrer que :

1. $10n^2+3=O(n^2)$ 2. $10n^2+3=O(n^3)$ 3. $\ln(n)=O(n^2)$
4. $2n^2=O(n^2)$ 5. $2n^2\cos(n^4)=O(n^2)$ 6. $10000n^2=O(n^2)$

✎ **Exercice 51**
Montrer que la suite de terme général $u_n=n$ est dominée par la suite de terme général $v_n=n^2$ mais que (v_n) n'est pas dominée par (u_n)

Proposition 40 (Suite dominée par une suite qui tend vers 0)**.**

Si $u_n=O(v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

✎ **Exercice 52**
Démontrer cette proposition.

Proposition 41 (Dominations et opérations)**.**

Pour tout suites u, v, w, a, b.

1. Transitivité : Si $u_n=O(v_n)$ et $v_n=O(w_n)$ alors $u_n=O(w_n)$
2. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, si $u_n=O(v_n)$ alors $\lambda u_n=O(v_n)$
3. Si $u_n=O(v_n)$ alors $u_nw_n=O(v_nw_n)$
4. Si $u_n=O(a_n)$ et $v_n=O(b_n)$ alors $u_nv_n=O(a_nb_n)$
5. Si $u_n=O(a_n)$ et $v_n=O(a_n)$ alors $u_n+v_n=O(a_n)$

✎ **Exercice 53**
Démontrer cette proposition.

✍ **Exemple 36**
Montrer que la suite n^2+5n+1 est dominée par la suite de terme général n^3.

VIII.3 Négligabilité

Définition 25 (Suite négligeable devant une autre)**.**

Soit u et v deux suites.
On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) si si

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$$

Notation : $u_n=o(v_n)$

✍ **Exemple 37**
On a $\ln(n)=o(n)$ et $n=o(e^n)$.

Remarque :
Soit u une suite. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0 \Leftrightarrow u_n=o(1)$$

✍ **Exemple 38**
$\frac{1}{n}=o(1)$

Remarque :
Si $u_n=(n+1)^2$ et $v_n=\frac{n^2}{4}$. La suite u n'est pas négligeable devant v et la suite v n'est pas négligeable devant u.

✎ **Exercice 54**
Quelle suite est négligeable devant l'autre ? $u_n=n^3$ et $v_n=n^2$

Proposition 42 (Suite négligeable devant une suite qui tend vers 0).

Si $u_n = o(v_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Proposition 43 (Négligeabilité et opérations).

1. Transitivité : Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$
3. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$
4. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$ alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$
5. Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n + v_n = o(a_n)$

✎ **Exercice 55**
Démontrer cette proposition.

Remarque :
On n'additionne pas les o !
Exemple : $n - 1 = o(n^2)$ et $1 = o(1 - n^2)$ mais n n'est pas négligeable davant 1.

Remarque :
On se sert souvent des o et O pour estimer la vitesse de convergence d'une suite en étudiant la suite $u_n - l$.
Par exemple si $|u_n - L| = O(e^{-n})$ alors la convergence est rapide (exponentielle) alors que si $|u_n - l| = O(\frac{1}{\ln(n)})$ la convergence est moins rapide.

Proposition 44 (Croissance comparée).

$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,$
$$(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$$

Proposition 45 (Croissance comparée).

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
$$\alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$$

Proposition 46 (Croissance comparée).

$\forall \alpha > 0, \forall a > 1,$
$$n^\alpha = o(a^n)$$

Proposition 47.

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}+)^2$
$$a < b \Rightarrow a^n = o(b^n)$$

Proposition 48 (Croissance comparée).

$\forall a \in \mathbb{R},$
$$a^n = o(n!)$$

Proposition 49 (Croissance comparée).

$$n! = o(n^n)$$

En notant négligeable devant $<<$ on a :
$\forall a > 1, \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,$

$$\boxed{(\ln(n))^\beta << n^\alpha << a^n << n! << n^n}$$

Remarque :
$\exp(n) = e^n$

Exemple 39
1. $(\ln(n))^3 = o(\sqrt{n})$
2. $n^4 = o(e^{2n})$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$
4. $9^n = o(n!)$

Exercice 56
Classer les suites de termes généraux suivant par ordre de négligeabilité :
1. $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$, $\frac{1}{n\ln(n)}$
2. n, n^2, $n\ln(n)$, $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, $\frac{n^2}{\ln(n)}$

Exercice 57
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie pour tout x réel par : $g_n(x) = x^5 + nx - 1$.
1. Etudier les variations de g_n.
2. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n tel que $g_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.
5. Calculer la limite de nu_n et en déduire un équivalent de u_n.
6. Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$.

Exercice 58
Etudier le comportement des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $a_n = (n+1)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
2. $b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
3. $c_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$
4. $d_n = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - 1$
5. $e_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}$
6. $f_n = n\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
7. $g_n = n\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$

VIII.4 Lien entre les différentes relations de comparaison

Proposition 50 (Réécriture d'une équivalence à l'aide de o).

Soient u et v deux suites réelles. On a

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$$

Remarque :
La relation $u_n - v_n = o(v_n)$ se note aussi $u_n = v_n + o(v_n)$

Méthode 14 (Pour donner l'équivalent d'une somme).

On traduit les équivalence de chacun des deux termes de la somme à l'aide de o

✍ **Exemple 40**
Trouver un équivalent de

$$u_n = \sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)} + e^{\frac{1}{n^3}}$$

✎ **Exercice 59**
Trouver un équivalent de $w_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}} - 1$.
Trouver un équivalent de $z_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

✎ **Exercice 60**
Déterminer un équivalent des suites suivantes et en déduire leur comportement asymptotique :

1. $n(n^{\frac{1}{n}} - 1)$
2. $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$
3. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $\frac{n^3 - 2\sqrt{n^3+1}}{\ln(n) - 3n^2}$
5. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
7. $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
8. $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
9. $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
10. $\ln(n+2) - \ln(n)$
11. $\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$
12. $3n^2 - 2\ln(n)^4 - n^{\frac{3}{2}}$

Proposition 51 (Implications)**.**

Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$

✎ **Exercice 61**
On pose $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 - 2$.

1. Déterminer des réels a, b, c et d tels que $u_n = a + \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $v_n = c + \frac{d}{n} + o(\frac{1}{n})$
2. En déduire un équivalent simple de la suite de terme général $e^{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 - 2$

VIII.5 Exercices classiques

✎ **Exercice 62**
Déterminer un équivalent simple des suites suivantes puis déterminer leur limite :

1. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
2. $(1+n^3)^{\frac{1}{3}} - n$
3. $e^{-n^2+\frac{1}{n}} - e^{-n^2}$
4. $\sin(\ln(1+\frac{1}{n}))$
5. $\ln(\ln(e+\frac{1}{n}))$
6. $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right)$
7. $\sqrt{n^2+n+1} - n$
8. $\frac{\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)\sin(\frac{1}{n})}{n^2+n^3}$
9. $\tan(\arcsin(\frac{1}{n}))$

✎ **Exercice 63**
Soit u une suite décroissante de limite 0 telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ On souhaite démontrer que $u_n \sim \frac{1}{2n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.

1. Montrer que a est convergente et déterminer sa limite
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n \leq 2nu_n \leq \frac{n}{n-1}a_{n-1}$.
3. Conclure

✎ **Exercice 64** *Série harmonique*
On considère la suite (h_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Etudier le sens de variation de (h_n).
2. Démontrer que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut on en déduire ?
3. On considère les suites u et v définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = h_n - \ln(n) \text{ et } v_n = h_n - \ln(n+1)$$

   (a) Démontrer que $(u_n - v_n)_n$ converge vers 0.
   (b) Démontrer que

$$\forall x \in]-1; +\infty[,\ \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

   (c) En déduire que u et v sont adjacentes.
4. (a) Déduire de ce qui précède un équivalent simple de h_n.
   (b) On notera γ la limite commune de u et v. Que peut on en déduire quant à h_n ?

✎ **Exercice 65** 1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 - 3x + 2 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n sur $]0,1[$
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.
3. On pose $v_n = x_n - 1$. Montrer que $v_n^2 \sim \frac{1}{3n}$ puis en déduire un équivalent de v_n
4. En déduire que $x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right)$ avec a et b des réels à préciser.

✎ **Exercice 66**
Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
1. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \lim(u_n - v_n) = 0$
2. Si $u_n \sim v_n$ a-t-on nécessairement $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

✎ **Exercice 67**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution x_n dans $[0; +\infty[$. On pourra étudier la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = -1 + x + \cdots + x^n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [\frac{1}{2}; 1]$.
3. Montrer que $f_n(x_{n+1}) < 0$. On pourra étudier le signe de la différence $f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1})$.
4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (x_n) est convergente. On note l sa limite.
6. Montrer que $l < 1$.
7. Montrer que $\lim x_n^n = 0$
8. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$x + \cdots + x^n = 1 \Leftrightarrow 1 = x \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

9. En déduire que $l = \frac{1}{2}$.