Chapitre ... : Variables aléatoires sur un univers fini

Dans tout ce chapitre on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

I Variable aléatoire

I.1 Définition

Définition 1.

Une **variable aléatoire réelle** X est une application définie sur l'univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple
On lance une pièce à trois reprises et on note X le nombre de fois où l'on a obtenu pile.

1. $\Omega = \dots\dots\dots$
2. $X(\Omega) = \dots\dots\dots$

On lance deux dés et on note X la somme des valeurs obtenues.

1. $\Omega = \dots\dots\dots$
2. $X(\Omega) = \dots\dots\dots$

Exemple
On lance deux dé et Y désigne la variable aléatoire qui donne le plus grand numéro obtenu.

1. $\Omega = \dots\dots\dots$
2. $Y(\Omega) = \dots\dots\dots$

Exercice 1
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément $p \leq N$ boules numérotées. On note

- X la variable aléatoire qui à tout élément de Ω associe le plus petit numéro tiré.
- Y la variable aléatoire qui à tout élément de Ω associe le plus petit grand tiré.

1. Que prendre comme univers Ω ?
2. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Définition 2.

Si X est une variable aléatoire réelle et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}$. On note $P(X \in A)$ la probabilité de cet événement.

Exemple
On lance deux dés et on s'intéresse à la variable aléatoire donnant la somme des chiffres obtenus.

Déterminer précisément les événements :

1. $\{X = 7\}$
2. $\{X \leq 4\}$
3. $\{8,5 \leq X \leq 10,1\}$

Définition 3.

Si X est une variable aléatoire réelle.
On note $P(X = x)$ la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}$. On note $P(X \leq x)$ la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}$.

Exemple
Si $\Omega = [\![1;6]\!]^2$ et $X : \Omega \to \mathbb{R},\ (i,j) \mapsto i+j$.
Déterminer $P(X=12)$, $P(X=7)$, $P(X \leq 4)$.

I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 4.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire. La **loi de** X est l'application

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \mapsto P(X \in A) \end{cases}$$

Proposition 1.

L'application P_X définit une probabilité sur l'univers fini $X(\Omega)$.

Démonstration :

Proposition 2 (SCE)**.**

Soit X une va sur un univers fini Ω.
La famille $\{X=x\}_{x\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements de Ω appelée le SCE associé à X. En particulier on a

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x) = 1$$

Exemple
Si X donne la somme des deux dé. $\Omega = \ldots\ldots\ldots$

Proposition 3 (Conséquence)**.**

On considère une variable réelle aléatoire X sur un univers fini (ce qui implique que $X(\Omega)$ est aussi un ensemble fini) et on note $X(\Omega) = \{x_1; \ldots x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La donnée de $P(X = x_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ permet de déterminer entièrement l'application P_X. En effect pour tout $A \subset X(\Omega)$, on a

$$P_X(A) = \sum_{x_i\in A} P(X = x_i)$$

Exemple
Dans l'exemple ou X est la variable donnant la somme des deux dé on a $X(\Omega) = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$
Les événements $\{X=2\}, \{X=3\}, \ldots \{X=12\}$ forment un SCE.
On a

1. $P(X=2) = \ldots\ldots\ldots$
2. $P(X=3) = \ldots\ldots\ldots$
3. $P(X=4) = \ldots\ldots\ldots$
4. $P(X=5) = \ldots\ldots\ldots$
5. $P(X=6) = \ldots\ldots\ldots$
6. $P(X=7) = \ldots\ldots\ldots$
7. $P(X=8) = \ldots\ldots\ldots$
8. $P(X=9) = \ldots\ldots\ldots$
9. $P(X=10) = \ldots\ldots\ldots$
10. $P(X=11) = \ldots\ldots\ldots$
11. $P(X=12) = \ldots\ldots\ldots$

En déduire $P(A)$ où $A = \{X \leq 7\}$

Méthode 1.

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. On commence par déterminer $X(\Omega)$
2. On détermine $P(X = x_i)$ pour tout i.

On présente souvent P_X dans un tableau :

$X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	Total
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

Exemple
Dans l'exemple ou X est la variable aléatoire donnant la somme des deux dés

$X(\Omega)$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 5$	$x_5 = 6$	$x_6 = 7$	$x_7 = 8$	$x_8 = 9$	$x_9 = 10$	$x_{10} = 11$	$x_{11} = 12$	Total
$P(X = x_k)$	$p_1 = \dots$	$p_2 = \dots$	$p_3 = \dots$	$p_4 = \dots$	$p_5 = \dots$	$p_6 = \dots$	$p_7 = \dots$	$p_8 = \dots$	$p_9 = \dots$	$p_{10} = \dots$	$p_{11} = \dots$	1

Exercice 2
Une urne contient N boules blanches ou rouges. Il y a une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules rouges. On prélève n boules de cette urne en un seul tirage. On suppose que $n \leq pN$ et $n \leq qN$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de X.

Exercice 3
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément $p \leq N$ boules numérotées. On note

— X la variable aléatoire qui à tout élément de Ω associe le plus petit numéro tiré.

— Y la variable aléatoire qui à tout élément de Ω associe le plus petit grand tiré.

Déterminer les lois de X et de Y.

Exemple
On lance deux dé et X désigne le plus grand nombre obtenu.
Déterminer la loi de X.

$X(\Omega)$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 6$	Total
$P(X = x_k)$	$p_1 = \frac{1}{36}$	$p_2 = \frac{3}{36}$	$p_3 = \frac{5}{36}$	$p_4 = \frac{7}{36}$	$p_5 = \frac{9}{36}$	$p_6 = \frac{11}{36}$	1

I.3 Image d'une variable aléatoire par une application

Définition 5.

Soit X une variable aléatoire réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$f(X) : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{array}$$

est une variable aléatoire réelle appelée image de X par f.

Exemple
Si f est la fonction carré et X la variabla aléatoire donnant la somme des deux dés. Déterminer la loi de la variable Y définie par $Y = f(X)$

1. $Y(\Omega) = \{4; 9; \dots; 144\}$
2. La loi de Y est

$Y(\Omega)$	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	Total
$P(Y = x_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

II Espérance

II.1 Définition

Définition 6.

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n\}$, on appelle **espérance mathématique** de X (ou encore moyenne de X) et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Exemple

Déterminer $E(X)$ où X est la variable aléatoire donnant la somme des deux dés.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{11} x_i p_i \\ &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Remarque : *Autres écritures de l'espérance*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$E(X) = \sum_{x \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Définition 7 (Variable aléatoire centrée)**.**

On dit qu'une variable aléatoire réelle est **centrée** si $E(X) = 0$

II.2 Théorème de tranfert

Théorème 1.

Soit X une var à valeurs finies et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On a

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i)$$

Exemple

Si f est la fonction carré et X la variable aléatoire donnant la somme des deux dés :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{11} f(x_i)P(X=x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{11} x_i^2 P(X=x_i) \\ &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{329}{6} \end{aligned}$$

Exemple
$E(aX+b) = aE(X)+b$

Proposition 4.

Soient X et Y deux var définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

1. Linéarité de l'espérance pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$
2. Positivité Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$
3. Si $X \leq Y$ (c'est-à-dire $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$) alors $E(X) \leq E(Y)$

Proposition 5.

Soient $X_1, \dots X_n$ des var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On a

$$E(X_1 + \dots X_n) = E(X_1) + \dots E(X_n)$$

III Variance et écart-type

Définition 8.

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. La variance de X est le nombre

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Remarque :
Si l'espérance est une mesure de position qui indique la valeur moyenne d'une variable aléatoire, sa variance mesure quant à elle la dispersion des valeurs de X autour de leur moyenne. En effet $E\left((X - E(X))^2\right)$ est la valeur moyenne de l'écart au carré entre X et sa moyenne.

Théorème 2 (Formule de Koenig-Huygens)**.**

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcl} V(X) & = & E((X-E(X))^2) \\ & = & E(X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2) \\ & = & E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ & = & E(X^2) - (E(X))^2 \end{array}$$

Exemple
Si X est la somme des deux dés :

$$\begin{array}{rcl} V(X) & = & E(X^2) - (E(X))^2 \\ & = & \dfrac{329}{6} - 7^2 \\ & = & \dfrac{35}{6} \end{array}$$

Proposition 6.

Soient X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Définition 9.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est **réduite** si $V(X) = 1$.

Exemple
Si X est une var de variance non nulle alors la va $Y = \frac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est réduite.

Définition 10.

Soient X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Théorème 3 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev)**.**

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On a

$$\forall t > 0,\ P\left(|X - E(X)| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} V(X)$$

Exemple
plus tard

Proposition 7 (Admise)**.**

Si X et Y sont deux variables indépendantes (ou plus généralement si X et Y sont non corrélées, voir cours TSI2) alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

IV Lois usuelles

IV.1 Loi certaine

Définition 11.

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On dit que X est une variable aléatoire certaine si $X(\Omega)$ ne contient qu'une seule valeur, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) = \{a\}$. On a alors $P(X = a) = 1$.

Proposition 8.

Loi :

$X(\Omega)$	a	Total
$P(X = x_k)$	1	1

Exemple
Une urne contient n boules de différentes couleurs toutes numérotés 7. L'expérience consiste à tirer une boule la variable aléatoire X désigne le numéro obtenu. La variable aléatoire X est une variable aléatoire certaine.

Proposition 9.

Si X suit une loi certaine telle que $X(\Omega) = a$ alors

1. $E(X) = a$
2. $V(X) = 0$

Démonstration : 1. $E(X) = \sum x_i p_i = a \times 1 = a$
2. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 \times 1 - a^2 = 0$

IV.2 Loi uniforme

Définition 12.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots x_n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots x_n\})$ si

1. $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n\}$
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$

Proposition 10.

Loi :

$X(\Omega)$	x_1	$\dots$	x_n	Total
$P(X = x_k)$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	1

Proposition 11.

Si X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ alors

1. $E(X) = \frac{n+1}{2}$
2. $V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$

Démonstration :

Calculons $E(X)$:

$$\begin{array}{rcl} E(X) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{n} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\ & = & \displaystyle\frac{n+1}{2} \end{array}$$

Avant de calculer la variance, calculons $E(X^2)$ grace à la formule de transfert.

$$\begin{array}{rcl} E(X^2) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 \times \frac{1}{n} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ & = & \displaystyle\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}$$

Appliquons maintenant la formule de Koenig :

$$\begin{array}{rcl} V(X) & = & E(X^2) - (E(X))^2 \\ & = & \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 \\ & = & \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} \\ & = & (n+1)\left(\dfrac{(4n+2)}{12} - \dfrac{3n+3}{12}\right) \\ & = & \dfrac{(n+1)(n-1)}{12} \end{array}$$

Exercice 4

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

IV.3 Loi de Bernoulli

Définition 13.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

Proposition 12.

Loi :

$X(\Omega)$	0	1	Total
$P(X = x_k)$	$1 - p$	p	1

Proposition 13.

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ alors

1. $E(X) = p$
2. $V(X) = p(1 - p)$

Démonstration :
On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i p_i \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p \\ &= p \end{aligned}$$

Grace à la formule de transfert on peux calculer $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum x_i^2 p_i \\ &= 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p \\ &= p \end{aligned}$$

Et on applique maintenant la formule de Koenig :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

Exercice 5
On peut aussi définir une variable aléatoire de bernoulli comme une variable X prenant deux valeurs a et b avec des probabilités p et $1 - p$. Dans ce cas, donner l'espérance et la variance de X.

IV.4 Loi binomiale

Définition 14.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Théorème 4.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors la somme $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Proposition 14.

Loi :

$X(\Omega)$	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	n
$P(X = x_k)$	$\binom{n}{0}p^0(1-p)^n$	$\binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}$	$\ldots$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$\ldots$	$\binom{n}{n}p^n(1-p)^{n-}$

Remarque :
Vérifions que la somme de toutes les proba fait bien 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= (p + (1-p))^n \\ &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

(On a utilisé la formule du binome de Newton)

Proposition 15.

Si X suit une loi Binomiale de paramètres n et p alors

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$

Proposition 16 (Formule du capitaine)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0; n]\!]$,

$$i \times \binom{n}{i} = n \times \binom{n-1}{i-1}$$

Démonstration :
Méthode 1 :
Pour l'espérance, on utilise le fait que si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, $X = X_1 + \dots X_n$ avec X_i suivant des lois binomiales de paramètres p.
Par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = E(X_1) + \dots E(X_n) = p + \dots + p = n \times p$$

Pour la variance on utilise la proposition 9 pour trouver que

$$V(X) = V(X_1) + \dots V(X_n) = np(1-p)$$

Méthode 2 : Calculs

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{n} x_i p_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

On utilise la formule du capitaine :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= n \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= np \times (p+1-p)^{n-1} \\
&= np \times 1 \\
&= np
\end{aligned}$$

Grace à la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 p_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

On utilise la formule fondamentale en proba :

$$i^2 = i(i-1) + i$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{n} (i(i-1)+i) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + np
\end{aligned}$$

On utilise deux fois de suite la formule du capitaine :

$$i(i-1)\binom{n}{i} = (i-1)i\binom{n}{i} = (i-1)n\binom{n-1}{i-1} = n(i-1)\binom{n-1}{i-1} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{i-2}p^i(1-p)^{n-i} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^{n} \binom{n-2}{i-2}p^{i-2}(1-p)^{(n-2)-(i-2)} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}p^{k}(1-p)^{(n-2)-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 \times (p+(1-p))^{n-2} + np \\
&= n(n-1)p^2 \times 1 + np \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

Par la formule de Koenig :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= np - np^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Exemple *Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenus.
On sait que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Sachant que $E(X) = \frac{n}{2}$ et $V(X) = \frac{n}{4}$ on a

$$P(|X - \frac{n}{2}| \geq \epsilon) \leq \frac{n}{4\epsilon^2}$$

ou encore

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

V Exercices

Exercice 6
Soit X une var suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$. Déterminer $E(Y)$.
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et que $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \frac{a^X}{2n}$.

Exercice 7
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. soit X une var à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$. Déterminer a puis calculer l'espérance de $X+1$ et en déduire l'espérance de X.

Exercice 8
On lance simultanément deux dés à six faces et on appelle Z la va égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 9
Soit X une V.A.R d'espérance m et de variance V et soit $Y = aX + b$

Comment faut il choisir a et b pour que Y soit une variable aléatoire centrée réduite ?

Exercice 10
Dans une ville une proportion p de personnes est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a deux chances sur 3 qu'elle-même soit contaminée. Un représentant de commerce (en parfaite santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades (atteints par le virus) rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?
2. Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?
   On pourra calculer $P(\overline{C})$

Exercice 11
Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n noires. On pioche au hasard et simultanément n boules. On appelle X la va qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 12
Le service après vente d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dipose d'équipe intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions on parfois lieu avec du retard. On admet que les appels ont lieu indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $0,25$.

1. Un client appelle le service à huit reprises. On désigne par X le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X
   (b) Calculer la probabilité de l'événement « le client a subi au moins un retard »
   (c) Calculer la probabilité de l'événement « le client a subi moins de quatre retards (strictement) »
   (d) Calculer la probabilité de l'événement « le client a subi moins de quatre retards sachant qu'il en a au moins un »
2. On considère un groupe de huit client différent. Deux d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont dû subir un retard à la suite de leur appel. On contacte au hasard quatre personnes parmi ces huit. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de clients mécontents parmi les quatre contactés.
   (a) Quelle loi de probabilité la variable Y suit-elle ?
   (b) Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 13
On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5 et on note X le plus petit numéro obtenu.

Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de $[\![1,5]\!]$.
A quelles parties de Ω correspondent les évènements $(X=1)$, $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$?
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 14
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 , dont 18 sont rouges et 18 sont noires , plus une cas numérotée 0 qui est verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire , gagne deux fois sa mise si la couleur misée sort.

Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort gagne 36 fois sa mise , toute mise sur le numéro 0 est interdite.

1. Le joueur mise a euros sur une couleur et on note X_1 son gain.
   Donner la loi de X_1 , puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Le joueur mise a euros sur l'un des numéros et on note X_2 son gain.
   Donner la loi de X_2 , puis calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
3. Si vous aviez a euros à miser , miseriez vous sur un numéro ou sur une couleur ?

Exercice 15
Un sac contient 10 jetons , 4 jetons rouges et 6 jetons blancs.

1. On tire successivement et avec remise 3 jetons et on considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons rouges tirés. Donner la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On tire simultanément 3 jetons et on considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons rouges tirés. Donner la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
3. On tire successivement sans remise 3 jetons et on considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons rouges tirés. Donner la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
4. On extrait les jetons un à un sans remise et on considère X la variable aléatoire réelle égale au rang du premier jeton rouge tiré. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 16
On lance deux dès non pipés simultanément. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ .Comparer ces espérances et commenter.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 17
On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu .Déterminer la loi de $Y = (X-3)^2$ et la loi de $Z = \frac{1}{X}$

Exercice 18
On tire avec remise 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.Soit X le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi , l'espérance et la variance de X.

Exercice 19
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice 20
Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

1. Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer espérance et variance de Z.

Exercice 21
Soit X une var sur un espace probabilisé fini. Etablir que

$$E(X)^2 \leq E(X^2)$$

Exercice 22
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Peut-on identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?