Cours/TP 7 : Fonctions récursives

Mots clés : *suites récurrentes, chaînes, listes, dichotomie, figures*

I Introduction

Les fonctions récursives ont plusieurs intérêts :

- leur écriture gagne souvent en lisibilité (une fois l'habitude prise!) par rapport à l'utilisation de for ou de while ;
- elles permettent de résoudre des problèmes d'habitude quasiment irrésolvables avec l'utilisation de for ou while.

Pour s'assurer qu'une fonction récursive se termine, il est coutume de placer dans les premières lignes une condition d'arrêt.

Par exemple cette fonction ne se termine jamais :

```
def f(x):
    x = 2 * x
    f(x)
    return x
```

```
f(3)
    x = 2 * 3
        x = 2 * 6
            x = 2 * 12
                ...
```

```
>>> f(3)
RecursionError: maximum recursion depth exceeded
```

II Suites définies par récurrence

II.1 Factorielle de n

Soit $n \in \mathbb{N}$. La factorielle de n est définie par récurrence par :

$$0! = 1, \qquad n! = n \times (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Compléter les algorithmes suivants :

Version itérative.

```
def fact(n: int) -> int:
    p = 1
    for i in range(           ):
        p = p * i
    return p
```

Version récursive.

```
def fact_rec(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return
```

```
>>> fact_rec(50)
30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000
```

II.2 Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par :

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Compléter les algorithmes suivants :

Version itérative.

```
def fibonacci(n: int) -> int:
    u = 0
    v = 1
    for i in range(           ):
        w = v # on sauvegarde v
        v = v + u
        u = w
    return v
```

Version récursive.

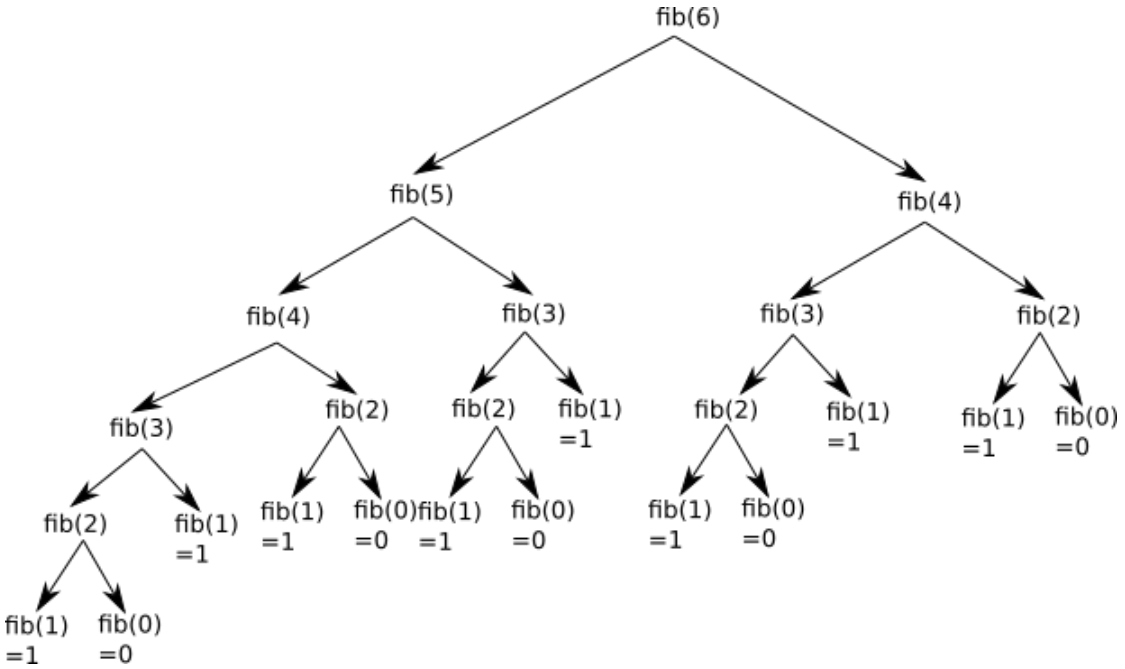
```
def fib(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return
    elif n == 1:
        return
    else:
        return
```

```
>>> fibonacci(10)
55
>>> fib(10)
55
```

```
>>> fibonacci(40)
102334155
>>> fibonacci(100)
354224848179261915075
```

➥ **Essayez !**

```
>>> fib(40)
```



II.3 Coefficient binomial

Rappelons que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a la relation de Pascal suivante :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Cette relation nous permet de construire par récurrence tous les coefficients binomiaux en sachant que $\binom{k}{k} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

II.3.1 Version itérative du calcul de $\binom{n}{p}$

```python
def ligne_suivante(L: list) -> list:
    ''' construit la ligne qui suit L
    dans le triangle de Pascal '''
    LL = []
    LL.append(1)
    for k in range(1, len(L)):
        LL.append(L[k-1] + L[k])
    LL.append(1)
    return LL
```

```python
def pascal_it(n: int, p: int) -> int:
    ''' renvoie le coeff binomial
    p parmi n '''
    L = [1, 1]
    for i in range(n-1):
        L = ligne_suivante(L)
    return L[p]
```

Compléter la version récursive :

```python
def pascal(n: int, p: int) -> int:
    ''' renvoie le coeff binomial p parmi n '''
    if p > n:
        return
    elif p == 0 or p == n:
        return
    return

>>> pascal(10, 6)
210
```

III Sur les chaînes de caractères

III.1 Compter le nombre d'un caractère d'une chaîne

Compléter l'agorithme version récursive suivant :

Version itérative.

```python
def compte_a(chaine: str) -> int:
    c = 0
    for lettre in chaine:
        if lettre == 'a':
            c = c + 1
    return c
```

Version récursive.

```python
def compte_a_rec(chaine: str) -> int:
    if len(chaine) == 1:
        if chaine[0] == 'a':
            return 1
        else:
            return 0
    else:
        if chaine[0] == 'a':
            return
        else:
            return
```

```
>>> compte_a_rec('bibapeloula')
2
```

III.2 Figures alphanumériques

Essayez !

```
def rectangle(n: int) -> None:
    if n > 0:
        print("*" * 5)
        rectangle(n-1)
```

```
>>> rectangle(5)
```

1. Ecrire une fonction récursive `triangle_bas(n)` qui étant donné n un entier naturel, produit le schéma suivant (la première ligne contient n étoiles) :

```
*****
****
***
**
*
```

2. Ecrire une fonction récursive `triangle_haut(n)` qui étant donné n un entier naturel, produit le schéma suivant (la dernière ligne contient n étoiles) :

```
*
**
***
****
*****
```

3. Ecrire une fonction récursive `figure(n)` qui étant donné n un entier naturel, produit le schéma suivant (la première ligne contient n étoiles) :

```
****
***
**
*
*
**
***
****
```

III.3 Modifier une chaîne de caractères

Déterminer l'action de cette fonction sur une chaîne de caractères :

```
def mystere(ch: str) -> None:
    if len(ch) >0 :
        mystere(ch[1:])
        print(ch[0], end='')     # le end='' permet de ne pas sauter à la ligne
                                 # à la fin du print
```

```
>>> mystere('bonjour')
```

IV Sur les listes

IV.1 Doublons

Ecrire un algorithme qui supprime les doublons d'une liste donnée en paramètre.

Version itérative

```
def doublons(L:list) -> list:
```

Version récursive

```
def doublons_rec(L:list) -> list:
    if len(L) <= 1:
        return L
    if L[0] != L[1]:
        return [L[0]] + doublons_rec(L[1:])
    del L[1]
    return doublons_rec(L)
```

IV.2 Une utilisation de pop

Rappel : l'instruction `L.pop(i)` supprime l'élément d'indice `i` de la liste `L`.

Décrire - avant de la tester sur l'ordinateur - l'action de la fonction `pp` ci-dessous sur une liste non vide `L` :

```
def pp(L: list):
    if len(L) == 1:
        return L[0]
    elif L[0] < L[1]:
        L.pop(1)
    else:
        L.pop(0)
    return pp(L)
```

IV.3 Recherche par dichotomie

On dispose d'une liste ordonnée (par ordre croissant) `L` et d'une valeur `e` dont il faut tester la présence dans la liste `L`.

Version itérative.

```
def dichotomie(L: list, e: int) -> int:
    deb = 0
    fin = len(L)  - 1
    milieu = (deb + fin) // 2
    while L[milieu] !=  e:
        if L[milieu]  > e:
            fin = milieu  - 1
        else:
            deb = milieu  + 1
    return (deb + fin) // 2
```

Version récursive.

```
def rech_dicho_rec(L: list, e: int, deb: int, fin
    if deb == fin :
        return
    mi = (deb + fin) // 2
```

V Diviser pour régner

On vous demande de deviner un nombre entre 1 et 100. A chaque proposition on vous indique si le nombre cherché est plus grand ou plus petit que votre proposition. Comment procédez-vous ?

Notion de cours (Diviser pour régner).

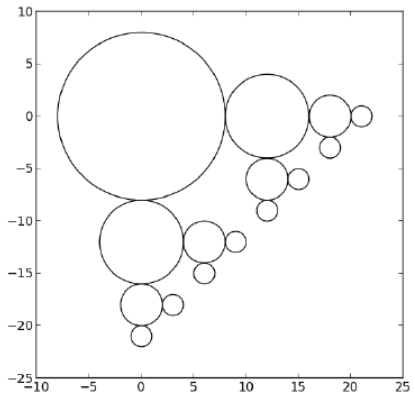
Un algorithme du type **diviser pour régner** est un algorithme consistant à diviser récursivement le problème à traiter en plusieurs sous-problèmes jusqu'à arriver à des problèmes simples qu'il est possible de résoudre directement.

Des exemples d'algorithmes diviser pour régner :

- La recherche par dichotomie.
- Le tri fusion, le tri rapide.
- Recherche des deux points les plus rapprochés.

VI Challenge : figure fractale

```
import pylab

F=pylab.gca() # F est une figure

def cercle(x: float, y: float, r: float) -> None:
    """ cercle de centre ( x , y ) et de rayon r """
    cir = pylab.Circle([ x , y ], radius=r, fill=False )
    # ajout du cercle à la f igure :
    F.add_patch(cir)

def CerclesRec(x: float, y: float, r: float) -> None:
    """ construction de la figure """
    cercle( x, y, r)
    if r > 1:
        CerclesRec ( x+3*r/2, y, r/2)
        CerclesRec ( x, y-3*r/2 , r/2)

CerclesRec(0, 0, 8)

pylab.axis('scaled')
pylab.show()
```



La figure précédente (à droite) peut être obtenue à l'aide d'une fonction récursive présentée ci-dessus.

La figure est formée d'un cercle et de deux copies de ce cercle ayant subies une réduction du rayon de facteur 2, ces deux petits cercles étant tangents extérieurement au cercle initial et tels que les lignes des centres sont parallèles aux axes du repère.
Ces deux petits cercles deviennent à leur tour "cercle initial" ...

Modifier la fonction pour obtenir la figure suivante :