MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TSI
1ère année

Classe préparatoire TSI1
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques. . .).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle.

Le choix a été fait d'introduire assez tôt dans l'année un module substantiel visant à consolider ou à introduire des pratiques de calcul (limites des fonctions, dérivation, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles) avant d'introduire les théories sous-jacentes, afin d'en faciliter l'assimilation.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres sections, en vue d'être acquises en fin de première année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs et les connecteurs logiques pour formuler avec précision certains énoncés et leur négation.
b) Ensembles	
Appartenance, inclusion.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $E \setminus A$, $\overline{A}$, A^c.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.	Un élément de E^p est appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
c) Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	
Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.	Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.	
Raisonnement par récurrence.	Dans la pratique, on se limite aux récurrences simple ou double. Les connaissances du cycle terminal sur les suites arithmétiques ou géométriques ou les calculs de sommes pourront servir de premier support d'étude, la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence trouvant progressivement sa place dans des situations variées du programme.
d) Autres méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition. Raisonnement par l'absurde.	
Principe d'analyse-synthèse.	Les étudiants doivent savoir distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples en évitant tout excès de technicité.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Applications	
Application (ou fonction) d'un ensemble E dans un ensemble F. Graphe.	Notation $\mathscr{F}(E,F)$. Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restriction.	Notation $f\|_A$.
Image directe, image réciproque.	On évite tout développement technique sur la notion d'image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$.
Composition.	Reconnaître une fonction composée.
Injection, surjection, bijection, réciproque d'une bijection. Application identité.	Interpréter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité à l'aide du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Premier semestre

Pratique calculatoire

Prenant appui sur les acquis de la classe de terminale, cette section a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont étudiées ultérieurement. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise cette section de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$.	
Compatibilité avec les opérations.	Dresser un tableau de signe.
Résoudre des inéquations. Application à l'étude de la position relative de deux courbes.	
Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$.	
L'objectif est une maîtrise élémentaire des inégalités.	
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Équations, inéquations polynomiales	
Ces notions sont nouvelles pour les étudiants.	
Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré. Discriminant.	
Équation du second degré à coefficients réels.	Recherche des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels.
Factorisation d'un polynôme de degré 2.	
Relation entre coefficients et racines des polynômes du second degré.	Déterminer le signe d'un trinôme. Connaissant une racine, en déduire rapidement l'autre en utilisant les relations entre coefficients et racines.
Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue.	Savoir factoriser un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont une racine est connue.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Équations, inéquations trigonométriques	
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles.	Trigonométrie dans un triangle rectangle.
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques.
Formules de factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et de $\sin(p) \pm \sin(q)$.	Linéarisation de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$.
Lignes trigonométriques associées aux transformations $\frac{\pi}{2} \pm a$ et $\pi \pm a$.	Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$.
Tangente d'un angle. Arctangente d'un réel.	Introduction à la fonction arctan, comme permettant de trouver la solution de $\tan(x) = b$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Interprétation sur le cercle trigonométrique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Calcul de limites en un point ou à l'infini	
Les étudiants ont peu manipulé les limites au lycée et il convient d'avoir une approche progressive.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse.	
Exemples de formes indéterminées : $$\infty - \infty\ ;\quad 0 \times \infty\ ;\quad 1^{\infty}\ ;\quad \frac{0}{0}\ ;\quad \frac{\infty}{\infty}.$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Limites de référence : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}.$$	Calculer une limite par encadrement ou par comparaison. Ces limites sont l'occasion de varier les situations lors des recherches de limite. La démonstration n'est pas un attendu du premier trimestre.
Croissances comparées. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\exp(x)} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x^n\exp(x) \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} \text{ et } \lim_{x\to 0} x^n\ln x \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$	
Limite d'une fonction composée.	

e) Calcul de dérivées, de primitives et d'intégrales

Ce paragraphe donne des résultats de calcul différentiel utiles aux autres disciplines scientifiques dès le premier semestre.

Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n\in\mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opérations : somme, produit, quotient, composée. Dérivation de $t\mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$.	
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître des expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{u'}{u^n}$, $u'\times(v'\circ u)$ où u et v sont des fonctions dérivables afin d'en calculer des primitives.
Intégrale d'une fonction sur un segment. Interprétation en terme d'aire sous la courbe. Linéarité de l'intégrale.	On s'appuie sur la formule $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$. On illustre les exercices avec des situations issues des autres disciplines. Aucune étude théorique n'est abordée à ce stade.

f) Sommes et produits

Le symbole de sommation a été introduit au lycée.

Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ sur des exemples de difficulté raisonnable.
Factorielle, coefficients binomiaux. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.	Notations $n!$, $\binom{n}{k}$ lue « k parmi n ». Les expressions de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ et $\binom{n}{n}$ sont à connaître.
Factorisation de a^n-b^n. Exemple de calcul de sommes : $$\sum_{k=0}^{n} k,\quad \sum_{k=0}^{n} q^k.$$	C'est l'occasion de remobiliser les résultats de la classe de terminale portant sur la somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :

- *équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *interprétation géométrique des nombres complexes ;*
- *exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier cette section aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques. Les étudiants issus des filières STL n'ont pas abordé la notion de nombre complexe. Il convient d'adopter une approche adaptée à l'aide de l'accompagnement personnalisé.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. Notations $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$.
Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.	Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\overline{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormé, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Module d'un nombre complexe. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$.	Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire.	Interpréter géométriquement $\lvert z-a\rvert$ pour $a,\ z \in \mathbb{C}$.
b) Nombres complexes de module 1	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1.	Notation $\mathbb{U}$.
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$.	
Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$. Formule de Moivre.	Factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$. Lien avec la factorisation de $\cos(p)+\cos(q)$. Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
c) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme exponentielle). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe. Calcul d'un argument à l'aide de la fonction arctan.
Arguments d'un produit, d'un quotient.	On interprétera géométriquement la multiplication d'un complexe par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
d) Exponentielle complexe	
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où $z = x+\mathrm{i}y$ et $x,\ y \in \mathbb{R}$. Relation $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Résoudre une équation du type $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$.
e) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées d'un nombre complexe.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou exponentielle.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Racines n-ièmes	
Racines de l'unité : définition, description, propriétés.	Représenter géométriquement les racines de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
Description des racines n-ièmes d'un nombre complexe.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Dans le prolongement du cycle terminal du lycée, on consolide dans cette section les méthodes d'étude et de représentation des fonctions réelles d'une variable réelle. Le champ des fonctions mobilisables est étendu : aux fonctions exponentielle et logarithme népérien et aux fonctions trigonométriques, étudiées en classe de terminale, on ajoute les fonctions puissances et les fonctions trigonométriques réciproques. Cette section est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$	
Ensemble de définition d'une fonction.	C'est l'occasion de faire travailler la notion de composition de fonction et la résolution d'inéquations.
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression. Représenter graphiquement $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x \pm a)$, $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$ à partir du graphe de f.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter géométriquement ces propriétés.
Somme, produit, quotient, composée.	
Monotonie.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.
Extremum global, extremum local.	C'est l'occasion d'établir des encadrements à partir d'études de signe.
b) Comportement asymptotique d'une fonction	
Asymptotes horizontales, verticales.	Interprétation graphique.
c) Dérivation	
Nombre dérivé en un point. Fonction dérivable en un point.	Interprétation géométrique du nombre dérivé.
Équation de la tangente en un point.	
Application à l'étude des variations ou du signe d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. Faire le lien entre injectivité et stricte monotonie. Un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. Les formules sont admises et pourront être démontrées au second semestre. La formule peut être illustrée graphiquement.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Étude d'une fonction	
Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction. Déterminer les variations et les limites d'une fonction. Déterminer les extremums éventuels d'une fonction. Tracer le graphe d'une fonction. Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.
e) Fonctions usuelles	
Racine carrée. Dérivée. Valeur absolue. Partie entière. Notation $\lfloor x \rfloor$.	Les étudiants doivent savoir représenter graphiquement ces fonctions.
Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. On introduit la notation $\sqrt[n]{x}$ pour $x > 0$, sans développement. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les formules du type $\sin(\arccos x)$ ne sont pas à connaître.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\exp(\beta x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot \exp(\beta x)$ pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x$ pour $\alpha > 0$.	Comparer les fonctions au voisinage de l'infini. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormé, angles. La donnée d'un repère orthonormé identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Cette section doit être traitée en liaison avec les autres disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormé (ou orthonormal). Coordonnées cartésiennes.	On peut introduire à cette occasion le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
Changement de repère par translation.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Barycentre	
La notion de barycentre est introduite en vue des autres disciplines et est l'occasion de manipuler les vecteurs.	
Systèmes de points pondérés et barycentre d'un système de points pondérés.	Construire le barycentre d'un système d'au plus 4 points du plan. L'associativité du barycentre est hors programme.
Coordonnées du barycentre dans un repère du plan.	Illustration pour le cas de l'isobarycentre de deux ou trois points.
c) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \Vert\vec{u}\Vert\,\Vert\vec{v}\Vert\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ sinon.	Interpréter le produit scalaire en termes de projections orthogonales.
Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée. Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. Déterminer une mesure d'un angle non orienté. Démonstrations non exigibles.
Dans une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, décomposition $$\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{u}.\vec{j})\,\vec{j}.$$	
d) Déterminant dans une base orthonormée directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\det(\vec{u},\vec{v}) = \Vert\vec{u}\Vert\,\Vert\vec{v}\Vert\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie.	Interpréter la valeur absolue du déterminant en termes d'aire d'un parallélogramme. Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormée directe. Calculer le déterminant dans une base orthonormée directe. Démonstrations non exigibles. Notation : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$
e) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal. Équation cartésienne et système d'équations paramétriques. Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Distance d'un point à une droite.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement. Déterminer l'intersection de deux droites. Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Application au calcul de la distance d'un point à une droite. Aucune formule de distance d'un point à une droite n'est au programme.
f) Cercles	
Définition, équation cartésienne. Représentation paramétrique	Reconnaître une équation cartésienne de cercle. Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans cette section, on adapte à l'espace les notions étudiées dans la section de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur la section de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormé (ou orthonormal) de l'espace ; coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. On peut à nouveau utiliser le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$: $$\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{u}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}.$$	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée directe. Démonstrations hors programme.
c) Produit vectoriel dans l'espace orienté	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \\|\vec{u}\\|\\,\\|\vec{v}\\| \sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \vec{k}$$ avec $\vec{k}$ unitaire et directement orthogonal à $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Bilinéarité, antisymétrie.	La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise. Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires. Exprimer les coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée directe. Démonstrations hors programme.
d) Déterminant dans l'espace orienté muni d'une base orthonormée directe	
Définition du déterminant de trois vecteurs : $$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}.$$ Trilinéarité, antisymétrie.	Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires. Interpréter $\left\lvert\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right\rvert$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Exprimer le déterminant dans une base orthonormée directe. Notation : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\\\ y & y' & y'' \\\\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$. Développement du déterminant selon la troisième colonne, en lien avec la définition. Démonstrations hors programme.
e) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre.

Contenus	Capacités & Commentaires
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite. Passer d'une représentation à l'autre. Étudier les intersections.
Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan. Distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan. Application au calcul de distances. Aucune formule de distance d'un point à une droite ou à un plan n'est au programme.
f) Sphères	
Définition, équation cartésienne dans un repère orthonormé.	Reconnaître une équation cartésienne de sphère. Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation. Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

En classe de terminale, les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre. Il s'agit dans cette section de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur. Cette section doit être traitée en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant	
Équation $y' + ay = b(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée.
Principe de superposition. Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.	Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $(A,B,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que x et y.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.
Équation $y' + ay = b$ où a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.	Les solutions relèvent des automatismes de calcul.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Donner l'équation caractéristique. Résoudre l'équation homogène.

Contenus	Capacités & Commentaires
Principe de superposition. Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.	Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $(A,B,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.
Équation $y'' \pm \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.	Les solutions relèvent des automatismes de calcul.

Systèmes linéaires

Il s'agit d'introduire des notions nouvelles pour les étudiants, qui ne les ont pas rencontrées dans le cycle terminal du lycée. L'objectif est double :

- *maîtriser la théorie des systèmes linéaires du point de vue de la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques ;*
- *préparer l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite, abordée au 2e semestre.*

Les résultats, présentés dans le cadre des systèmes à coefficients réels, sont étendus sans difficulté au cas des systèmes à coefficients complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Systèmes linéaires	
Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues.	Reconnaître qu'un système donné est un système linéaire. Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$.
Système homogène.	Système homogène associé à un système quelconque.
Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée $(A\|B)$ où B est la colonne des seconds membres.	Calculer le produit d'une matrice par une colonne. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de λL_j à L_i pour $i \neq j$.	Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
Deux matrices sont dites équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Relier cette notion à la théorie des systèmes linéaires. Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.
Si on passe d'un système $\mathscr{S}$ à un autre système $\mathscr{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathscr{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathscr{S}$.	Cela justifie la présentation matricielle d'un système linéaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan	
Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes : 1. si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ; 2. à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.	Reconnaître et exploiter des matrices échelonnées dans le cadre de l'étude de systèmes linéaires. Un schéma en « escalier » illustre la notion de matrice échelonnée. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite en lignes lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.	
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes.	Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système donné. L'unicité est admise.
c) Résolution d'un système linéaire	
Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).	Faire le lien entre nombre d'équations, nombre d'inconnues et nombre de pivots. L'invariance du nombre de pivots est admise.
Rang d'un système linéaire. Rang d'une matrice.	Le rang est ici défini comme égal au nombre de pivots.
Système incompatible. Système compatible.	Déterminer des conditions de compatibilité pour un système donné.
Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible.	Résoudre un système compatible.
Caractérisation du nombre de solutions par le rang. Cas particulier des systèmes carrés.	Il s'agit ici de préparer l'étude et la caractérisation des familles libres et des isomorphismes.
d) Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$	
Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
Famille libre, famille liée. Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs u_1, u_2,..., u_p de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : • la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre ; • le système $AX=0$ a pour seule solution la solution triviale ; • le rang est à égal à p.	Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée. L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.
Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs u_1, u_2,..., u_p de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : • les vecteurs u_1,..., u_p forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$; • pour tout matrice colonne B à n lignes, le système $AX=B$ est compatible ; • le rang est à égal à n.	Déterminer un système d'équations linéaires de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$. Donner une interprétation géométrique dans les cas $n=2$ et $n=3$. L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.

Dénombrement

Cette section a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;*
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Cette section est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui de la section « Pratique calculatoire ».

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini non vide. L'ensemble vide est de cardinal nul.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}(A)$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Maîtriser le langage des applications et des bijections dans le cadre des ensembles finis, et le relier aux notions élémentaires sur le dénombrement.
Cardinal d'une union disjointe, de l'union de deux ensembles, d'un complémentaire, d'un produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Dénombrement	
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations relevant de ce cadre. La notation A_n^p est hors programme.
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre. Donner une interprétation combinatoire des propriétés suivantes : $$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p};\quad \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n;\quad \binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}.$$

Deuxième semestre

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels). Les notions de borne supérieure et inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Droite réelle.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Distance entre deux réels.	
La relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$. Majorant, maximum, minorant, minimum. Borne supérieure, borne inférieure.	Cas d'une partie de $\mathbb{R}$, puis d'une fonction réelle.
Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	Résultat admis. Aucun développement n'est attendu.
Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$; une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a,b] \subset I$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. Reconnaître une suite extraite. Représenter les termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Toute étude d'une telle suite doit être guidée.
Opérations.	
Monotonie, stricte monotonie.	
Suite minorée, majorée, bornée.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\lvert u_n \rvert)$ est majorée.
Suite arithmétique, suite géométrique.	En terminale technologique, les suites géométriques n'ont été vues qu'avec des raisons positives.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite réelle convergente est bornée.	
Si une suite possède une limite (finie ou infinie) alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Montrer la divergence d'une suite à l'aide de suites extraites.
Si les suites $\left(u_{2n}\right)$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ convergent vers la même limite alors la suite $\left(u_n\right)$ converge vers cette limite commune.	
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques.	
Passage à la limite dans une inégalité.	
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorèmes de convergence par encadrement.	On pourra montrer l'existence d'une limite ℓ en majorant $\lvert u_n - \ell \rvert$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\lvert u_{n+1} - \ell \rvert \leqslant M \lvert u_n - \ell \rvert$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.
Théorème de la limite monotone.	Exploiter ce théorème sur des exemples.
Théorème des suites adjacentes.	Il convient d'insister sur l'intérêt algorithmique de cette notion : résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$.
e) Comparaisons de suites	
Relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	Notation $u_n = O(u_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Croissances comparées des suites usuelles : $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} et $e^{\gamma n}$.	Traduire les croissances comparées à l'aide de o.
Lien entre les différentes relations de comparaison.	Équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites. Toute autre opération sur les équivalents est hors programme.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Limites, continuité et dérivabilité

Cette section est divisée en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire au premier semestre.
Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.
Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe qui suit consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	Aucun formalisme n'est attendu sur la notion de voisinage.
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.	
Image d'une suite de limite ℓ par une fonction admettant une limite en ℓ.	Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite à l'aide de deux suites.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Comparaison de fonctions	
Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions.	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence.	Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.
c) Continuité en un point	
Continuité de f en un point a de I.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la continuité. La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à droite et à gauche.	
Prolongement par continuité en un point.	Pour a n'appartenant pas à I, la fonction f se prolonge par continuité en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples. On pourra en profiter pour introduire la notion de stabilité d'un ensemble par combinaison linéaire sans évocation particulière de structure vectorielle.
d) Continuité sur un intervalle	
Définition. Opérations. Ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.	
Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	Appliquer le procédé de dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue. Démonstration hors programme.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration hors programme.
e) Continuité et bijectivité	
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$; sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (de même monotonie que la fonction f).	Appliquer ce résultat sur des exemples. Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. Démonstration hors programme.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité de f en a, nombre dérivé.	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition. Notation $f'(a)$.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1.	La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique.
Dérivabilité à droite et à gauche en a. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, fg et, si $g(a)\neq 0$, de $\dfrac{f}{g}$.	
Dérivabilité et dérivée en a de $g\circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$.	
Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle $J=f(I)$ et si f est dérivable en a, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée en ce point.	Interprétation géométrique de la formule de la dérivée de la fonction réciproque.
Extension des résultats précédents aux fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, propriétés de la réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$.	
c) Propriétés des fonctions dérivables	
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	
Théorème de Rolle.	Utiliser le théorème de Rolle pour établir l'existence de zéros d'une fonction. Démonstration non exigible.
Égalité des accroissements finis.	Interpréter ce résultat de manière géométrique et cinématique. Le théorème de la limite de la dérivée est hors programme.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I et si, pour tout $t\in I, \lvert f'(t)\rvert \leqslant M$, alors $$\text{pour tous } x,y \text{ de } I,\ \lvert f(y)-f(x)\rvert \leqslant M\lvert y-x\rvert.$$	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Appliquer ces résultats sur des exemples.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I, où k appartient à $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.	Ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$.
Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Intégration sur un segment

L'objectif de cette section est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée au lycée. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale $\int_a^b f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$.
Valeur moyenne.	Interprétation graphique.
Inégalité $\left\lvert\int_a^b f\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f\rvert$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$.
Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (où $a<b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.	
b) Sommes de Riemann et méthode des rectangles	
Si f est une fonction continue de $[a,b]$ (où $a<b$) dans $\mathbb{C}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interpréter géométriquement cette propriété. Démonstration dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Approximer une intégrale par la méthode des rectangles ou la méthode des trapèzes. On pourra à cette occasion donner une justification numérique de la valeur moyenne.
c) Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a).$$	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
Intégration par parties. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles. Pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples : aucune théorie de la décomposition en éléments simples n'est au programme.
d) Formule de Taylor avec reste intégral	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	Exploiter la formule de Taylor avec reste intégral pour établir des égalités, des inégalités.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme; il relève des outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a. Unicité, troncature.	Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$. Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right)\right)$$ avec $a_0 \neq 0$. Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$.	Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit. Composition, application au quotient.	Exploiter la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité. Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division suivant les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	Calculer le développement limité d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ à partir de ses dérivées successives.
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de développements limités simples. Exploiter les outils logiciels pour des développements limités plus complexes. Les étudiants doivent connaître les développement limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan ainsi que celui de tan à l'ordre 3.
b) Applications des développements limités	
Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure. Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.
Étude locale d'une fonction.	Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales. Aucun résultat général n'est exigible.

Polynômes

L'objectif est d'étudier par des méthodes élémentaires les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels ou complexes ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ou $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
Opérations : somme, produit et composée. Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme et d'un produit.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. La notion de valuation d'un polynôme est hors programme.
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.	Effectuer une division euclidienne de polynômes.
c) Dérivation	
Polynôme dérivé.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynôme associée.
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.	
d) Racines	
Racine (ou zéro) d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité.
Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	
e) Décomposition en facteurs de degré 1	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Décomposition d'un polynôme en facteurs de degré 1 sur $\mathbb{C}$.	Démonstration hors programme. On illustre l'idée de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, mais l'étude générale des polynômes irréductibles est hors programme.
f) Somme et produit des racines d'un polynôme	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Recherche de deux nombres complexes connaissant leur somme et leur produit.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrices : opérations et propriétés	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.	Notation $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.	Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit de deux matrices.	Interpréter la j-ème colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ème colonne de B. Interpréter la i-ème ligne du produit AB comme le produit de la i-ème ligne de A par B. Cas particulier de la multiplication à droite par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou la multiplication à gauche par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ pour en extraire une ligne ou une colonne.
Puissance et inverse d'une matrice diagonale.	
Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.	Calculer les puissances de certaines matrices carrées.
b) Matrice inversible	
Matrice carrée inversible. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n.	Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes. Caractériser l'inversibilité par le rang. Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse. Calcul de l'inverse d'une matrice A carrée de taille n par différents moyens (par inversion d'un système, à l'aide de la matrice augmentée $(A\|\mathrm{I}_n)$, à l'aide d'un polynôme annulateur...). On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement. Toute théorie générale des groupes est exclue. La notion de comatrice est hors programme.
Inverse du produit de matrices inversibles.	

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique des sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans la sous-section « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

La deuxième sous-section « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels à la sous-section « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :

– *traiter cette section selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques développées dans les sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel » ;*
– *mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	
Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega$ pour Ω non vide (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.	Identifier un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.	Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels.	Notation $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.	
La somme $F + G$ est directe si l'écriture de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.	Exploiter une relation $F \cap G = \{0\}$ pour démontrer que F et G sont en somme directe.
Sous-espaces supplémentaires.	Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné sur deux sous-espaces supplémentaires.
b) Familles finies de vecteurs	
Vecteurs colinéaires. Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée. Obtenir une relation de dépendance dans une famille liée.
Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.	
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.
Bases. Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1, \ldots e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.	

B - Espaces vectoriels de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dimension finie	
Un espace est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.	Exhiber une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie.
Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.	Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension.	On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.
Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Si E est de dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.	
b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	
Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.
Supplémentaires d'un sous-espace. Existence, dimension commune.	Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par leur intersection réduite au vecteur nul et la somme de leurs dimensions. Base obtenue par concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires.
Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	Cas d'une somme directe.
c) Famille finie d'une famille de vecteurs	
Rang d'une famille finie $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Majorer le rang d'une famille de vecteurs en exhibant une relation linéaire. Le minorer en exhibant une sous-famille libre. Utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice. Notation $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_p)$.

C- Applications linéaires et représentations matricielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes.	Notations $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Savoir utiliser l'image par une application linéaire de quelques vecteurs pour en déduire l'image d'une combinaison linéaire de ces derniers.
Identité, application $X \mapsto AX$.	Notation Id_E. On peut identifier $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées. Règles de calcul.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Notation $\mathrm{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.
Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel.	
Image et noyau.	Notations $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau, la surjectivité à l'aide de l'image.

b) Isomorphismes

Contenus	Capacités & Commentaires
Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (toute) base de E en une base de F. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Si E et F ont même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est bijective si elle est injective ou surjective.	Cas particulier des endomorphismes. Contre-exemples en dimension infinie.

c) Modes de définition d'une application linéaire

Contenus	Capacités & Commentaires
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	

d) Rang d'une application linéaire

Contenus	Capacités & Commentaires
Rang d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Rang d'une composée : $$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\big).$$	
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	Démonstration hors programme. Utilisation pour la recherche d'une base de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

e) Équations linéaires

Contenus	Capacités & Commentaires
Une équation, d'inconnue $x \in E$, est dite linéaire si elle est de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.	Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2. La notion de sous-espace affine est hors programme.

f) Représentation matricielle en dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Expression des coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B} = \mathscr{C}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Un couple de bases $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ étant fixé, isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire après un changement de base(s). Choisir une base adaptée à un problème donné. L'objectif est de donner une première approche de notions qui seront approfondies en seconde année. La diagonalisation est hors programme.

g) Différentes notions de rang

Image et noyau d'une matrice.	Notations $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. Déterminer des équations de l'image et du noyau de A. On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image. Théorème du rang appliqué aux matrices.
Lien entre les divers aspects de la notion de rang.	Le rang de A, défini comme le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente, est également le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée. On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.
Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple de bases. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. Conservation du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible.	Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot. Pour le calcul à la main, on se limite à des cas simples.

Probabilités sur un univers fini

Cette section a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Espaces probabilisés finis

Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou des résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	Modéliser des situations aléatoires. On se limite au cas où l'univers Ω est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton). Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.	Maîtriser le lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. Notation $\overline{A}$ pour l'événement contraire.
On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω. Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.	Expliciter l'espace probabilisé modélisant une situation aléatoire décrite en langage naturel.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que : $$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(\{\omega_i\}) = p_i.$$	Calculer la probabilité d'un événement à partir d'un tableau de probabilités. Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).	
b) Indépendance et conditionnement	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	Illustrer une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales.	
Formules de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$	On donnera plusieurs applications de la vie courante.
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geqslant 3$.

Variables aléatoires sur un univers fini

La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite aux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variable aléatoire	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.	Modéliser des situations données en langage naturel à l'aide de variables aléatoires. Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notation $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. Lien entre les événements $(X = k)$, $(X \leqslant k-1)$ et $(X \leqslant k)$.
Loi de probabilité P_X d'une variable aléatoire X.	L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une application.	
b) Espérance	
Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Variable centrée. Relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})\, X(\omega)$.	Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule $\mathrm{E}\big(\varphi(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$.	Calculer une espérance à l'aide de la formule du transfert.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ pour a et b réels.	On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.

c) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Variance et écart type d'une variable aléatoire. Variable réduite. Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$ (Koenig-Huygens). $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$ pour a et b réels.	Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

d) Lois usuelles

Loi certaine.	
Loi uniforme.	Reconnaître des situations modélisables par une loi uniforme.
Loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi de Bernoulli. Notation $\mathscr{B}(p)$.
Loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi binomiale. Notation $\mathscr{B}(n,p)$.
Espérance et variance associées à ces différentes lois.	Pour la loi uniforme, on limitera les résultats à la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.